KTH Matematik

5B1230 Matematik IV, för I1
Konstrollskrivning nr 4, torsdag 2006-05-18 kl 13.15 - 14.15
Version: **A**

Tillåtna hjälpmedel BETA,

Namm: Födelsenr:

Kursens student-idnr: (ifylles av rättande lärare)

Lycka till!

Uppgifter:

1. Givet vetktorfältet $(P, Q) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$. Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy$$

i följande två fall;.

(a) Γ är cirkeln $(x-2)^2 + y^2 = 9$ i positiv riktning.

(b) Γ är cirkeln $(x-4)^2 + y^2 = 9$ i positiv riktning.

Lösning
Derivering ger $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ och $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, dvs $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ utom i origo där P och Q inte är deriverbara. Det medför att linjeintegralen är noll för alla slutna enkla kurvor som inte går kring origo och att linjeintegralen är lika för alla slutna enkla kurvor som går kring origo i positiv riktning.
Första kurvan en cirkel med centrum i $(2, 0)$ med radie 3 går kring origo i positiv riktning och kan då ersättas t.ex. med enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i positiv riktning. Parametrisera enhetscirkeln med $(cos\theta, \sin\theta)$ blir efter inättning i definitionen för linjeintegralen $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.
Svar: 2π
Andra kurvan en cirkel med centrum i $(4, 0)$ med radie 3 går inte kring origo.
Svar: 0

2. Beräkna beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (y^2 - x^2, y\mathrm{e}^{yz}, 1 + 2xz - z\mathrm{e}^{yz})$. genom ytan Y: $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, z \geq 0$ där ytan är orienterad så att normalen har en positiv z-komponent.

Lösning

Vi beräknar för divergensen av fältet

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y\mathrm{e}^{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(1 + 2xz - z\mathrm{e}^{yz}) = 0$$

Dvs. fältet är ett källfritt flöde om vi sluter till ellipsoiden med bottenytan B: $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ får vi en sluten yta och det total flödet ut genom den blir noll eftersom divergensen är noll. Flödet upp genom ytan Y är därför lika stor som flödet upp genom bottenytan B. På B är $z = 0$ och fältet blir då $\mathbf{F} = (y^2 - x^2, y, 1)$, och uppåtriktade enhetsnormalen $(0, 0, 1)$. Insättes detta i definitionen för flödesintegralen genom B får vi

$$\iint_B dxdy = areal(B) = 4\pi$$

Svar: Flödet gjenom ytan Y är 4π.

(a) Visa att fältet

$$\mathbf{F} = (2xy^4, 4x^2y^3)$$

är ett gradientfält.

Lösning

Sätt

$$\mathbf{F} = (P, Q) = (2xy^4, 4x^2y^3)$$

Derivering ger $\frac{\partial Q}{\partial x} = 8xy^3$ och $\frac{\partial P}{\partial y} = 8xy^3$, dvs. $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ för alla (x, y) i planet vilket medför att fältet är ett gradientfält.

(b) Finn en potential P sådan att $\mathbf{F} = \nabla(P)$.

Lösning

Vi ska lösa

$$\frac{partialU}{\partial x} = 2xy^4$$

$$\frac{partialU}{\partial x} = 4x^2y^3$$

Integrering med avseend på x av första likheten ger

$$U = x^2y^4 + g(y)$$

Här är $g(y)$ integrationskonstanten som kan variera med y. Vi sätter in detta U i den andra likheten och får då $4x^2y^3 + g'(y) = 4x^2y^3$ dvs. $g'(y) = 0$ så $g(y) = C$, en kontant. Efternom det räcker med att finna en funktion U kan vi sätta $C = 0$.

Svar: En potential är x^2y^4.

(c) Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr},$$

där Γ är kurvan längs ellipsen $9x^2 + 16y^2 = 25$, i positiv, riktning från punkten $(\frac{5}{3}, 0)$ till punkten $(1, 1)$.

Lösning

Eftersom vi har en potential till vektorfältet så blir linjintegralen differensen mellan potentialens värde i kurvans ändpunker:

$$U(\text{ändpunkt}) - U(\text{startpunkt}) = U(1,1) - U(\frac{5}{3}, 0) = 1 - 0 = 1$$

Svar: Linjeintegralen blir $= 1$.