KTH Matematik

5B1230 Matematik IV, för I1
Konstrollskrivning nr 2, ondag 2007-05-22 kl.12.30-13.10
Tillåtna hjälpmedel BETA

Namn: *Glöm inte ditt namn här!* Personnr: *Glöm inte det!*

Kontrollskrivningen har 3 uppgifter, tryckta på var sitt ark. Skriv lösningnen direkt på samma ark; använd eventuellt baksidan av arket.
Kontrollskrivningen är anonymiserad inför rättningen.
Rättande lärare får ej känna till Ditt namn och personnr.
Namn och födelsnummer får endast skrivas på detta första ark.
Ditt kontrollnummer står på baksidan av detta ark. Ditt kontrollnummer är också förtryckt överst på alla andra ark.

Ditt resultat på kontrollskrivningen kommer att annonseras på kursens WEB-sida med kontrollnummer och poäng. Därför är det viktigt att Du kommer ihäg Ditt kontrollnummer.

Detta fösta-ark **uppsamlas** -under skrivtiden - i ett särskilt kuvert - mot uppvisande av legitmation.

Efter att kontrollerande lärare gett tecken:

. *Riv av detta första-ark*
. *lägg det vid sidan på bänken tillsammans med legitmation,*
. *gör en minnesanteckning av ditt kontrollnummer och börja skrivningen.*

Skrivsal:...... Student har visat legitmation:......
Rad: 1 2 3 4 5 6 7 8 ...... framifrån (circla in)
Plats: 1 2 3 4 5 6 7 8 ...... från vänster (circla in)

....
Kontrollantens signatur.

Lycka till!

Kontroll-nr:9001

Kontroll nr: 9001.
Inget namn eller personnr på detta ark.

KTH Matematik

5B1230 Matematik IV, för I1
Konstrollskrivning nr 2, fredag 2007-04-22, 11.00-12.00
min.
Version: **A**

Lägg din kod på minnet!
Lycka till!

Markera behandlade uppgifter med $\times$,
ej behandlade med -

1	2	3

Bedömning:

1	2	3	Σ

Betyg

Rättat av: ______________________________

1. Version: **A**

Givet är differentialekvationen

$$t^2y'' - 4ty' + 6y = t^4\mathrm{e}^t.$$

En lösning till den motsvarande homogena differentialekvationen är $y_1 = t^2$.

(a) Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen.

(b) Finn den lösning till differentialekvationen, som uppfyller begynnelsevillkoren $y(1) = 1$ och $y'(1) = 0$.

Lösning till Version A

Vi använder den givna lösningen $y_1 = t^2$ och ansätter lösningen $y = t^2u$. Derivering ger $y' = 2tu + t^2u'$ och $y'' = 2u + 4tu' + t^2u''$ villket insättes i differentialevationen vi får då

$$t^4u'' = t^4e^t.$$

Efter förkortning får vi $u'' = e^t$ vilket integreras två gånger efter varandra $u' = e^t + C_1$, $u = e^t + C_1t + C_2$. Vi sätter in detta i utrycket $y = (t^2u)$ och får $y = t^2e^t + C_1t^3 + C_2t^2$.
Sätter vi in begynnelsevilkoret $y(1) = 1$, så får vi

$$1 = e + C_1 + C_2. \qquad (1)$$

Deriverar y så får vi $y'(t) = (2t + t^2)e^t + 3C_1t^2 + 2C_2t$. Sätter vi in begynnelsevillkoret $y'(1) = 0$ så får vi

$$0 = 3e + 3C_1 + 2C_2. \qquad (2)$$

Löser vi ut C_1 och C_2 ut ekvationerna (1) och (2) så får vi $2 = -e - C_1$, dvs $C_1 = -e - 2$ och $1 = -2 + C_2$ dvs $C_2 = 3$ Bygynnelsvärdeproblemet har därför lösningen
$y(t) = t^2e^t - (e + 2)t^3 + 3t^2$
Svar*:*
a) Den allmänna lösningen är $y = t^2e^t + C_1t^3 + C_2t^2$.
b) Begynnelsvärdeproblemet har lösningen
$y(t) = t^2e^t - (e + 2)t^3 + 3t^2$.

Kontroll nr: 9001.
Inget namn eller personnr på detta ark.

2. Version: **A**

Givet autonoma systemet

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$$

där **A** är en konstant matris. En lösning till systemet är

$$\mathbf{Y}_1 = t\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

En annan lösning är

$$\mathbf{Y}_2 = \mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm matrisen **A**:s egenvärden samt ange tillhörande egenvektorer.

(b) Skriv upp den allmänna lösningen till systemet.

(c) Skriv upp den lösning som uppfyller begynnelsvärdevillkoret

$$\mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Lösning till Version A

Av första givna lösningen ser vi ett av egenvärdena är 2*, vidare ser vi att det inte kan finnas tre oberoende egenvektorer, men att en av egenvektorerna är*

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Av den andra givna lösningen ser vi att ett av egenvärdena är 4 *och att en motsvarande egenvektor är*

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Kontroll nr: 9001.
Inget namn eller personnr på detta ark.
Vi får därför
Svar a): *Egen värden* 2 *och* 4 *med egenvektorer*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{resp.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En fundamental lösningsmängd är förutom de två givna lösningarna $\mathbf{Y}_1$ *och* $\mathbf{Y}_2$ *i tillägg lösningen*

$$\mathbf{Y}_3 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Svar b)*: Den allmänna lösningen kan därför skrivas*

$$\mathbf{Y}(t) = C_1 \left[t e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att det givna begynnelsevillkoret blir uppfylt om vi väljer $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ *och* $C_3 = 3$ *dvs.*
Svar:c) *Begynnelsevärdeproblemet har lösningen*

$$\mathbf{Y}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.
$$x' = 3y + xy,$$
$$y' = x^2 - xy + 3.$$

(a) Finn alla kritiska punkter till systemet.

(b) Bestäm dessa kritiska punkter med avseende på lokal stabilitet, ange också dess typ.

Lösning till Version A

För att finna de kritiska punkterna sätter vi högerleden i systemet lika med noll dvs.

$$3y + xy = 0, x^2 - xy + 3 = 0.$$

Vi faktoriser den första ekvationen: $y(x+3) = 0$ *och ser att först ekvationen är uppfylld om* $y = 0$ *eller om* $x = -3$.
Om $y = 0$ *blir den andra ekvationen* $x^2 + 3 = 0$ *som saknar rell lösning.*
Om $x = -3$ *blir den andra ekvationen* $12 + 3y = 0$ *och vi får då* $y = -4$.
Svar a) *Enda kritiska punkt i planet är punkten* $(-3, -4)$
För att klassifisera den krititska punktern reknar vi förs ut Jakobi matrisen $J(x, y)$. *Partiell deriverin av systemets högerled ger*

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} y & x+3 \\ 2x - y & -x \end{pmatrix}.$$

I den kritiska punkten får vi

$$J(-3, -4) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Egenvärden λ *får vi ur ekvationen*

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & 0 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

dvs $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$ *dvs.* $\lambda = 3$ *och* $\lambda = -4$. *Av detta drar vi slutsatsen*
Svar c). *Den kritiska punkten* $(-3, -4)$ *är en ostabil sadelpunkt.*

Kontroll nr: 9001.
Inget namn eller personnr på detta ark.