KTH Matematik

5B1230 Matematik IV, för I1
Konstrollskrivning nr 3, måndag/tisdag maj 14-15, 2007. 60 min
Tillåtna hjälpmedel BETA

Namn: Personnr:

Kontrollskrivningen har 3 uppgifter, tryckta på var sitt ark. Skriv lösningnen direkt uppgifts-arken ; använd hela uppslaget av arket.
Kontrollskrivningen är anonymiserad inför rättningen.
Rättande lärare får ej känna till Ditt namn och personnr.
Namn och födelsnummer får endast skrivas på detta första ark.
Ditt kontrollnummer står på baksidan av detta ark. Ditt kontrollnummer är också förtryckt överst på alla andra ark.

Ditt resultat på kontrollskrivningen kommer att annonseras på kursens WEB-sida med kontrollnummer och poäng. Därför är det viktigt att Du kommer ihäg Ditt kontrollnummer.

Detta fösta-ark **uppsamlas** -under skrivtiden - i ett särskilt kuvert - mot uppvisande av legitmation.

Efter att kontrollerande lärare gett tecken:

. *Riv av detta första-ark*
. *lägg det vid sidan på bänken tillsammans med legitmation,*
. *gör en minnesanteckning av ditt kontrollnummer och börja skrivningen.*

Skrivsal:. . . . . . Student har visat legitmation:. . . . . .

Rad: 1 2 3 4 5 6 7 8 . . . . . . framifrån (circla in)

Plats: 1 2 3 4 5 6 7 8 . . . . . . från vänster (circla in)

. . . .
Kontrollantens signatur.

Lycka till!

Kontroll-nr:9001

Kontroll nr: 9001.
Inget namn eller personnr på detta ark.

KTH Matematik

5B1230 Matematik IV, för I1
Konstrollskrivning nr 3, tisdag 2007-05-15 kl.11.00-12.00
Version: **A**

Lägg din kod på minnet!
Lycka till!

Markera behandlade uppgifter med ×,
ej behandlade med -

1	2	3

Bedömning:

1	2	3	Σ

Betyg

Rättat av: ______________________

1. Version: **A**

Beräkna integralen

$$\int_0^2 \left(\int_y^2 \frac{ye^{x^2} - y}{x} dx \right) dy$$

LÖSNING
Vi byter integrationsordning:

$$= \int_0^2 \left(\int_0^x \frac{ye^{x^2} - y}{x} dy \right) dx = \int_0^2 \frac{\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} (e^{x^2} - 1)}{y} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x (e^{x^2} - 1) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[e^{x^2} - x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left(e^4 - 5 \right).$$

Kontroll nr: 9001.
Inget namn eller personnr på detta ark.

2. Version: **A**

Låt Beräkna dubblelintegralen

$$\int\int_D (4x^4 - y^4)dxdy$$

där D är området

$$D = \{(x, y); 1 \le xy \le 3, 2 \le 2x^2 - y^2 \le 4, x > 0, y > 0\}.$$

LÖSNING
Vi gör variabelbyte: sätter $u = xy$ *och* $v = 2x^2 - y^2$ *och får då det nya området* $D_1 = \{(u, v) : 1 \le u \le 3, 2 \le v \le 4\}$. *Vi beräknar lätt funktionaldeterminanten*

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & 2x \\ x & -4y \end{vmatrix} = -2(x^2 + 2y^2)$$

Så vi får

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{-2(x^2 + 2y^2}$$

Vi kan faktorisera integranden $(4x^4 - y^4) = (2x^2 - y^2)(2x^2 + y^2)$.
Variabelsubstitutionen ger därför

$$\iint_{D_1} \left(4x(u, v)^4 - y(u, v)^4\right) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(v, u)}\right| dudv = \iint_{D_1} \frac{v}{2} dudv = \int_1^3 du \int_2^4 vdv = 2\left[\frac{v^2}{2}\right]_2^4 = 12.$$

Kontroll nr: 9001.
Inget namn eller personnr på detta ark.

3. Version: **A**

Ett skålformat glasföremål begränsas av de två ytorna
$z = \frac{1}{5}(3x^2 + 5y^2)$ och $z = \frac{1}{5}(1 + 2x^2 + 4y^2)$.
Beräkna dess volym.

LÖSNING
De båda ytorna skär varandra när $z = \frac{1}{5}(3x^2+5y^2) = \frac{1}{5}(1+2x^2+4y^2)$. *Då är* $x^2 + y^2 = 1$. *Skålen projektion på* xy *-plandet blir därfor* $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *och vi beräknar volymen som integralen*

$$\iint_D \left(\int_{z=\frac{1}{5}(3x^2+5y^2)}^{\frac{1}{5}(1+2x^2+4y^2)} dz \right) dxdy = \iint_D \left(\frac{1}{5}(1 + 2x^2 + 4y^2) - \frac{1}{5}(3x^2 + 5y^2) \right) dxdy = \iint_D \big(1 -$$

Vi skiftar till polära koordinarer (r, θ) *(som har funktionaldeterminant* $= r$*) och integrationsområdet blir* $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. *Integralenblir då*

$$\frac{1}{5} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r dr = \frac{2}{5}\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{5}\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{10}.$$

Kontroll nr: 9001.
Inget namn eller personnr på detta ark.