KTH Matematik

5B1230 Matematik IV, för I1
Konstrollskrivning nr 4, onsdag 2007-05-23 kl.11.00-12.00
Tillåtna hjälpmedel BETA

Namn: Personnr:

Kontrollskrivningen har 4 uppgifter, tryckta på var sitt ark. Skriv lösningnen direkt uppgifts-arken ; använd hela uppslaget av arken.
Kontrollskrivningen är anonymiserad inför rättningen.
Rättande lärare får ej känna till Ditt namn och personnr.
Namn och födelsnummer får endast skrivas på detta första ark.
Ditt kontrollnummer står på baksidan av detta ark. Ditt kontrollnummer är också förtryckt överst på alla andra ark.

Ditt resultat på kontrollskrivningen kommer att annonseras på kursens WEB-sida med kontrollnummer och poäng. Därför är det viktigt att Du kommer ihäg Ditt kontrollnummer.

Detta fösta-ark **uppsamlas** -under skrivtiden - i ett särskilt kuvert - mot uppvisande av legitmation.

Efter att kontrollerande lärare gett tecken:

. *Riv av detta första-ark*
. *lägg det vid sidan på bänken tillsammans med legitmation,*
. *gör en minnesanteckning av ditt kontrollnummer och börja skrivningen.*

Skrivsal:...... Student har visat legitmation:......

Rad: 1 2 3 4 5 6 7 8 ......framifrån (circla in)

Plats: 1 2 3 4 5 6 7 8 ......från vänster (circla in)

....
Kontrollantens signatur.

Lycka till!

Kontroll-nr:9001

Kontroll nr: 9001.
Inget namn eller personnr på detta ark.

KTH Matematik

5B1230 Matematik IV, för I1
Konstrollskrivning nr 4, onssdag 2007-05-23 kl.11.00-12.00
Version: **A**

Lägg din kod på minnet!
Lycka till!

Markera behandlade uppgifter med $\times$,
ej behandlade med -

1	2	3

Bedömning:

1	2	3	Σ

Betyg

Rättat av: ______________________________

1. Version: **A**

Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma (1 + y^2 \sin(xy^2))dx + (x + 2xy \sin(xy^2))dy$$

där Γ är halvcirkeln $x^2+y^2 = 1, y \geq 0$ från punkten $(-1, 0)$ till punkten $(1, 0)$

LÖSNING:
Vi betecknar fältet som (P, Q) *och undersöker först om* $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ *blir ett enkelt uttyck. Derivering och subtraktion ger*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Det betyder att vi kan lätt ändra integrationsvägen och korrigera resultatet. Längs x*-axeln är vektorfältet* $(1, x)$ *och där är* $dy = 0$*. Om vi integrerat från punkten* $(-1, 0)$ *till punkten* $(1, 0)$ *efter* Γ_0*, som är längs* x*-axeln får vi integralen*

$$\int_{\Gamma_0} = \int_{-1}^{1} 1dx = 2.$$

Kurvan $\Gamma_0 - \Gamma$*, dvs längs* x*-axeln från* $(-1, 1)$ *till* $(1, 1)$ *och sedan tillaka till* $(-1, 1)$ *längs kurvan* Γ *men i motsatt riktning, bildar en enkel sluten kurva i positiv riktning kring halva cirkelskivan:* $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$*. Greens formel ger då*

$$\int_{\Gamma_0} (P, Q) \cdot \mathbf{dr} - \int_\Gamma (P, Q) \cdot \mathbf{dr} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \iint_D 1dxdy = \frac{\pi}{2}.$$

Slutsaten är att den sökta kurvintegralens värde är: $2 - \frac{\pi}{2}$.

Kontroll nr: 9001.
Inget namn eller personnr på detta ark.

2. Version: **A**

Beräkna flödet av fältet

$$\mathbf{F} = (xy - x, -y^2 + x, yz + x)$$

ut gjenom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

LÖSNING:
Vi beräknar först divergensen av $\mathbf{F}$*= blir:*

$$div\mathbf{F} = (y - 1) - 2y + y = 1$$

Enligt Gauss sats är det totale flödet ut genom sfären lika med integralen av divergensen över det klotet som ligger innaför sfären. Eftersom divergensen är 1 blir denna integral lika med klotets volym. Klotets radie är 2 *så dess volym är*

$$\frac{4\pi}{3}2^3 = \frac{32\pi}{3}$$

Svaret blir: Det totala flödet ut genom sfären är $\frac{32\pi}{3}$
(i Version B uppgiften är divergensen -1 *så där blir relsultatet* $-1\cdot$ *volymenen av klotet så svaret blir negativt , det totala flödet ut genom sfären är negativt, vilktet innebär att det är ett postivt totalt inåtriktat flöde.*

Kontroll nr: 9001.
Inget namn eller personnr på detta ark.

3. Version: **A**

Givet är vektorfältet

$$\mathbf{F} = (y + 2x^2, x + 3y^2).$$

(a) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}$ har potential $P(x, y)$.

(b) Bestäm potentialen $P(x, y)$ ovan så att $P(0, 0) = 0$

(c) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{dr}$$

där Γ är en cirkelbåge som går från punkten $(1, 1)$ till punkten $(2, 1)$

LÖSNING:
(Bokstaven P är ju redan använd så vi kan beteckna vetorfältet med (Q, R).)

(a) Vecorfältet (Q, R) har en potential om $\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Det lite arbete derivering av detta uttryck visar det sig att alla termer tar ut varandra och uttrycket blir lika med 0.

(b) Om P är en potential till fältet (Q, R) så innbär det att $P'_x = Q$ och $P'_y = R$, Vi integrerar över den ena variabeln, exempelvis x:

$$P = \int P'_x dx + g(y) = \int (y + 2x^2) dx + g(y) = xy + \frac{2}{3}x^3 + g(y).$$

Här är $g(y)$ en integrationskonstant som beror på y. (Deriverar vi båda sidor med avseende på x så ser vi att $g(y)$ termen försinner helt). Vi deriverar nu båda sidor med avseende på y och får identiteten

$$(x + 3y^2) = R = P'_y = x + g'(y).$$

D.v.s. $g'(y) = 3y^2$ efer integration får vi $g(y) = y^3 + C$, där integrationskonstaten C bestämmes med hjälp av villkoret $P(0, 0) = 0$. Vi får

$$P(x, y) = xy + \frac{2}{3}x^3 + y^3 + C$$

Sätter vi $P(0,0) = 0$ *så får vi* $C = 0$
Svar: Potentialen $P(x,y) = xy + \frac{2}{3}x^3 + y^3$

Kontroll nr: 9001.
Inget namn eller personnr på detta ark.