KTH Matematik

Tentamenskrivning i Matematik IV , 5B1230 Matematik IV, del 1 och del 2

Tisdagen den 30 maj, 2006, kl 8.00 - 13.00

Hälpmedel BETA,Mathematics Handbook
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 moduler (uppgifter).
För godkänt betyg krävs 5 moduler godkända.
Del 2 är avsedd för högre betyg,4 och 5, och omfattar 20 poäng
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 9 poäng från del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 15 poäng från del 2.
GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN 2006!
Detta sker enligt följande:
Godkänd molul nr i ger uppgift nr i godänd. $i = 1, 2, \dots, 6$.
Bonuspoäng från våren 2006 får tillgodoräknas på del 2.

Lycka till!

Del 1.

1. (Modul 1)
   Givet Bernoulli's ekvation
   $$y' + y = y^3.$$
   (a) Finn den lösning som uppfyller $y(0) = 2$.

   (b) Finn alla stationära lösningar och undersök dem med avseende på stabilitet.

2. (Modul 2)
   Bestäm allmän lösning till systemet
   $$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$
   Vad händer med partiklar, som placeras i punkterna $(6, -8)$ respektive $(8, -10)$, efter lång tid?

3. (Modul 3)
   Finn en lösning till ekvationen
$$y(x) = 1 - 2x + \int_0^x e^{-t} y(x-t)dt \text{ för } x > 0.$$
4. (Modul 4)
   Finn den lösning till den partiella differentialekvationen
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
   som uppfyller randvillkoren
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0,$$
   och begynnelsevillkoret
$$u(x,0) = 2\sin 3x + 4\sin 7x, \quad 0 < x < \pi.$$
5. (Modul 5)
   Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D (3xy + 2y^2)dxdy,$$
   där D är det begränsade området i första kvadranten, som begränsas av kurvorna $y = x^2$, $x + y = 6$ och x-axeln.
6. (Modul 6)
   (a) Visa att fältet
$$\mathbf{F} = (y\mathrm{e}^{xy} + 2xy, x\mathrm{e}^{xy} + x^2)$$
   är ett gradientfält.
   (b) Finn en potential U sådan att $\mathbf{F} = \text{grad }(U)$.
   (c) Beräkna linjeintegralen
$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr},$$
   där Γ är kurvan längs cirkeln $x^2 + y^2 = 4$, i positiv riktning, från punkten $(2,0)$ till punkten $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Del 2.

1. Ett infanteriregemente marscherar över en lång bro med försumbar inre dämpning. Avvikelsen, i mm. $y(t)$ från jämviktsläget för brons mittpunkt antas för $t > 0$ vara bestämd av ekvationen $y'' + y = f(t)$ där $f(t) = \sum_{n=0}^{999} 5\delta(t - n \cdot \pi)$, stötpåkänningen orsakad av marscherandet. $\delta(t)$ är som vanligt Diracs deltafunktion, t, tiden mäts i sekunder.
   (a) Bestäm $y(t)$ för $t > 0$ om $y(0) = y\prime(0) = 0$ (3p).
   (b) Beräkna speciellt, via svaret i (a) $y(t)$ för intervallen $0 < t < 2\pi$, $2\pi < t < 4\pi$ och $4\pi < t < 6\pi$.
   Hur kam man förmoda att $y(t)$ ser ut för $(n-1) \cdot 2\pi < t < n \cdot 2\pi$?
   Har man skäl att tro att bron rasar till slut? (2p)

2. (a) Formulera Gauss' sats för flödesintegraler. (1p)
   (b) Visa Gauss sats för den tredje komponenten av vektorfältet (dvs. med den extra förutsättningen att att första och andra komponenten av vektorfältet är noll), i det fall då ytan (Ω) är randen till en område K i rummet av formen $K = \{(x, y, z) : \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), \quad (x, y) \in D\}$ för något område D i planet. (2p)
   (c) Använd satsen att beräkna flödet av fältet

$$\mathbf{F} = (x - 2x^3y, 3x^2y^2 - y\sin(yz), z + z\sin(yz)),$$

   ut genom sfären som är centrerad i origo och med radie 2. (2p)

3. (a) Beskriv hur man under lämpliga förutsättningar kan göra variabelbyte i dubbelintegraler i planet.(Ge formel men ej bevis) (2p)
   (b) Låt $D = \{(x, y) : 2 \leq xy \leq 4, \quad 1 \leq x - y \leq 3, \quad x \geq 0, y \geq 0\}$.
   Finn en avbildning från (x, y) till $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ som avbildar området D på en rektangel. (1p)
   (c) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x + y)^3 dxdy,$$

   där D är som, ovan genom att göra ett lämpligt variabelbyte. (2p)

V.G.V

4. Kalle skall ställa upp ett icke-homogent system av differentialekvationer

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t),$$

med motsvarande homogena system

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t).$$

Han önskar bestämma 2×2-matrisen $\mathbf{A}(t)$ och 2-dimensionella kolonnvektorn $\mathbf{B}(t)$, båda beroende av t så dessa system får vissa önskade lösningar. Vi ska hjälpa honom.

(a) Härled hur man kan få fram matrisen $\mathbf{A}(t)$ om man känner en fundamental lösningsmatris $\phi(t)$ till det homogena systemet. (2p)

(b) Använd detta till att bestämma matrisen $\mathbf{A}(t)$ så att

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos^2(t) \end{pmatrix}$$

blir lösningar till det homogena systemet. (2p)

(c) Bestäm kolonnvektorn $\mathbf{B}(t)$ så att dessutom

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

blir en partikulärlösning till det icke-hommogena systemet. (1p)