Tenta

Lösningsförslag 5B1230. 28 maj 2007

Modul 1

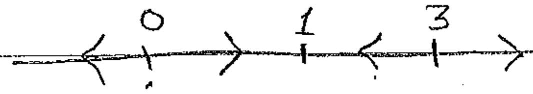
stationära lösningar när högerledet noll.

Dvs. $y=0$, $y=1$ och $y=3$.

Teckenstudium: y: 0 1 3

y': $-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$

Fasporträtt:



Slutsats: $y=3$ instabil, $y=1$ stabil, $y=0$ instabil } stationär lösning

Modul 2

Finn egenvärden λ genom karaktäristiska ekvationen:

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+10 = \lambda^2-4\lambda+13$$

dvs $(\lambda-2)^2+9=0$ $\quad \lambda_1 = 2+3i$

$\lambda_2 = 2-3i$

Finn egenvektor för:

$\lambda_1 = 2+3i$ $\quad \begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0$

ger egenvektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}$ och

en komplex lösning: $Y_0 = e^{(2+3i)t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} =$

$= e^{2t}(\cos 3t + i\sin 3t)\begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}$

Realdel och imaginärdel ger två linjärt oberoende lösningar Y_1 och Y_2

$$Y_0 = e^{2t}\left(\cos 3t \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \sin 3t \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}\right)$$

$$+ i e^{2t}\left(\sin 3t \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \cos 3t \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}\right)$$

$$= Y_1 + i Y_2$$

Den allmänna lösningen på reell form blir:

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t}\{2c_1 \cos 3t + 2c_2 \sin 3t\} \\ e^{2t}\{(c_1 - 3c_2)\cos 3t + (3c_1 + c_2)\sin 3t\} \end{bmatrix}$$

Modul 3

Laplace transformera ekvationen:

$$sY(s) - 1 + 5Y(s) = 10 \frac{2}{s^2+4} Y(s)$$

$$\left[s + 5 - \frac{20}{s^2+4}\right] Y(s) = 1$$

$$\frac{s^3 + 5s^2 + 4s}{s^2+4} Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{s^2+4}{s(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+1}$$

T. ex. genom handpåläggningsmetoden får vi $A = 1$, $B = \frac{5}{3}$, $C = -\frac{5}{3}$.

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{s+4} - \frac{1}{s+1}\right)$$

Inverse Laplacetransform ger lösning
$y(t) = 1 + \frac{5}{3}\left(e^{-4t} - e^{-t}\right)$

Modul 4

Vi ansätter separabel lösning $u(x,y) = X(x)Y(y)$ och sätter in i ekvationen:

$$XY'' = X''Y + 25XY$$

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} + 25 = \text{konstant}$$

som ger två ekvationer:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = \lambda \\ \frac{Y''}{Y} = \lambda + 25 \end{cases}$$

eller
$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ Y'' - (\lambda + 25)Y = 0 \end{cases}$$

Randvillkoren ger $X'(0) = X'(\pi) = 0$

$\lambda > 0$, och $\lambda = 0$ ger då endast trivial lösning $X(x) = 0$.

$\lambda < 0$ ger lösning $X = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}\,x)$

Här ger $0 = X'(0) = -\sqrt{-\lambda}\, B$

dvs. $X = A\cos(\sqrt{-\lambda}\, x)$ och

$0 = X'(\pi) = -\sqrt{-\lambda}\, A \sin(\sqrt{-\lambda}\, \pi)$

Icke trivial lösning: $A = 0$ medför

$\sin(\sqrt{-\lambda}\, \pi) = 0$, $\sqrt{-\lambda}\, \pi = n\pi$

$\lambda_n = -n^2$.

Vi får separabla lösningar:

$$u_n(x,y) = \cos nx \; Y_{\lambda_n}(y)$$

och $u_n(x,0) = \cos(nx)\; Y_{\lambda_n}(0)$

Vi tar en linjärkombination av sådana lösningar så att

$u(x,0) = 2\cos 4x + 4\cos 12x$

dvs

$$u(x,y) = \cos 4x \; Y_{\lambda_4}(y) + \cos 12x \; Y_{\lambda_4}(y)$$

där $Y'_{\lambda_4}(0) = 2$ och $Y'_{\lambda_{12}}(0) = 4$

$Y_{\lambda_4}(0) = 0$ $\qquad$ $Y_{\lambda_{12}}(0) = 0$

Y_{λ_4} uppfyller diffekvation

$$Y''_{\lambda_4} - (-4^2 + 25)Y = 0$$

dvs $Y''_{\lambda_4} - 9Y = 0$ som ger $Y_{\lambda_4}(y) = C_1 e^{3y} + C_2 e^{-3y}$

$$\left.\begin{array}{l} Y_{4\lambda}(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ Y'_{4\lambda}(0) = 3C_1 - 3C_2 = 2 \end{array}\right\} C_2 = -C_1, \quad C_1 = 1/3, \quad C_2 = -1/3$$

s.4.

$$Y_{\lambda_4}(y) = \frac{1}{3}(e^{3y} - e^{-3y})$$

$Y_{\lambda_{12}}$ uppfyller diffekvationen

$$Y''_{\lambda_{12}} - (-12^2+25)\, Y_{\lambda_{12}} = 0$$

$$Y''_{\lambda_{12}} + \sqrt{119}\, Y = 0$$

$$Y_{\lambda_{12}} = C \cos\sqrt{119}\, y + B \sin\sqrt{119}\, y$$

begynnelsevillkoren ger B.

$$Y_{\lambda_{12}}(0) = C = 0$$

$$Y'_{\lambda_{12}}(0) = -\sqrt{119}\, D = 4$$

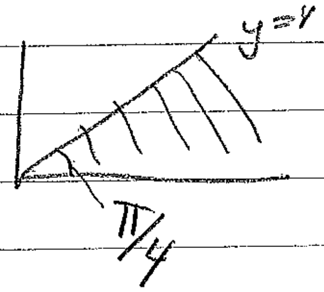
$$D = \frac{4}{\sqrt{119}}$$

$$Y_{\lambda_{12}} = -\frac{4}{\sqrt{119}} \cos\sqrt{119}\, y$$

<u>Svar</u> $u(x,y) = \frac{1}{3}\cos 4x\,(e^{3x} - e^{-3x})$

$$- \frac{4}{\sqrt{119}} \cos 12x \cos\sqrt{119}\, x$$

Modul 5



Låt $D_R = \{ x^2+y^2 \leq R^2,\ 0 \leq y \leq x \}$

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$ beräknas först

sen undersöker vi gränsvärdet då $R \longrightarrow \infty$

Inför polära koordinater

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$dxdy = r\,dr\,d\theta$
$0 < r < R$
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^R = \frac{\pi}{8} \left[1 - e^{-R^2} \right]$$

som går mot $\frac{\pi}{8}$ då $R \longrightarrow \infty$

Svar: Konvergerar mot $\frac{\pi}{8}$

Modul 6

Alternativ 1 använd divergenssatsen (Gauss sats). Det förutsätt att ytan är sluten. Vi lägger till ytan

$Y_0 = \{ x^2+y^2 \leq 1, z=0 \}$

med enhetsnormal $(0,0,-1)$

där är fältet $F = (y^2, x^2, y^2)$

Divergenssatsen ger

$$\iint_{\Omega} F \cdot N dS + \iint_{\Omega_0} F \cdot N dS = \iiint_K \operatorname{div} F \, dx dy dz$$

där $K = \{ 0 < z \leq 1-x^2-y^2 \}$

$$\operatorname{div} F = (-2z) + (0) + (2z+1) = 1$$

vi får

$$\iint_{\Omega_0} F \cdot N dS = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (y^2, x^2, y^2) \cdot (0,0,-1) dx dy$$

$$= -\iint_{x^2+y^2 \leq 1} y^2 dx dy = -\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr$$

$$= -\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = -\pi \cdot \frac{1}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\iiint_K \operatorname{div} F dx dy dz = \iiint_K dx dy dz = \iint_{x^2+y^2\leq 1} dx dy \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) =$$

S.7.

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} 1-x^2-y^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)\, r\,dr$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right] = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Vi har alltså

$$\iint_{\Omega} F \cdot N\,dS - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Svar $\iint_{\Omega} F \cdot N\,dS = \frac{3\pi}{4}$