Inlämningsuppgift för Matematisk Analys, fortsättningskurs, 5B1304.

Inlämnas senast den 27/4 2004.
Godkänd uppgift ger 2 bonuspoäng på tentamen.

Kan inlämnas antingen till kursledaren i samband med undervisningen eller i institutionens brevlåda i Klocktornet (Lindstedtsvägen 25). Ange alltid personnummer, namn. Om Du lägger uppgiften i institutionens brevlåda, så måste Du också ange kursledaren som adressat.

Som förberedelse för detta problem är det bra att läsa igenom stycke 11.11 i kursboken om Laplaceoperatorn i cylindriska och sfäriska koordinater.

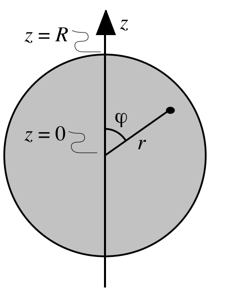
Problemet

Om ett homogent värmeledande klot uppvärms genom att dess yta på höjden z [m] över horisontalplanet hålls på temperaturen $f(z)$ [°C], så kommer värmen i klotet att stabilisera sig vid ett stationärt värmetillstånd då lång tid får passera. Detta stationära värmetillstånd är rotationssymmetriskt kring klotets lodräta diameter.

Man kan visa att temperaturen i en vertikal genomskärning av klotet i en godtycklig punkt ges av en funktion av typen

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \mathrm{P}_n(\cos\varphi),$$

där r och φ är de polära koordinaterna för punkten enligt figuren här bredvid, P_n är Legendrepolynomet av ordning n och $A_n, n = 0, 1, \ldots,$ är en följd konstanter.



Vertikal genomskärning av klotet

Nu till *uppgiften*:

a. En temperaturfördelning beskrivs av lösningar till värmeledningsekvationen.

   Vilka förenklande antaganden leder till lösningarna $u(r,\varphi)$ ovan? Vilken differentialekvation (i bara r och φ) löser dessa funktioner $u(r,\varphi)$?

b. Visa hur konstanterna $A_n, n = 0, 1, \ldots,$ beräknas ur $f(z)$ och klotets radie R [m].

c. Låt $R = 1$ och $f(z) = z^a \sin(b\pi z)$, där
   $a =$ (resten som de första sex siffrorna (ååmmdd) av Ditt tiosiffriga personnummer ger vid division med 7) $+1$ och
   $b =$ (resten som de sista fyra siffrorna av Ditt tiosiffriga personnummer ger vid division med 7) $+1$. †

   Rita med hjälp av något grafhjälpmedel (Maple, Matlab) upp minst 20 isotermer för temperaturen i ett lodplanet genom klotets medelpunkt.

† Skulle Du sakna personnummer eller ha ett som innehåller någon bokstav väljer Du $a = 2$ och $b = 5$.

Anmärkning: För att få en uppfattning om hur man lämpligen trunkerar den oändliga serien kan man grafiskt testa hur väl

$$\sum_{n=0}^{N} A_n \mathrm{P}_n(\cos\varphi) = \lceil z = \cos\varphi \text{ på periferin} \rceil = \sum_{n=0}^{N} A_n \mathrm{P}_n(z)$$

för olika N överensstämmer med $f(z)$.

Några intressanta Maplekommandon

`int(F(x),x=a..b);`	Beräknar (om möjligt) $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$
`sum(F(n),n=a..b);`	Beräknar $\sum_{n=a}^{b} F(n)$, a och b måste vara heltal.
`evalf(a);`	Beräknar närmevärde (i standardinställning med 10 siffror) till a, som måste vara ett tal.
`Digits:= N;`	Alla närmevärdesberäkningar görs med N siffror.
`with(orthopoly);`	Laddar bl a in Legendrepolynomen.
`with(plots);`	Laddar in extra plotrutiner, bl a för ritning av nivåkurvor.
`P(n,x)`	Legendrepolynomet $\mathrm{P}_n(x)$.
`plot(F(x),x=a..b);`	Plottar grafen för $F(x)$ i intervallet $a \leq x \leq b$.
`contourplot([r*sin(phi),r*cos(phi),u(r,phi)], r=a..b,phi=c..d,contours=n);`	Ritar n st. nivåkurvor för den funktion som i polära koordinater ges av $u(r,\varphi), a \leq r \leq b, c \leq \varphi \leq d$.