Institutionen för Matematik
KTH
Mattias Dahl

Kontrollskrivning, Matematik påbyggnadskurs, 5B1304
Tisdagen 2/3 2004 kl. 15.15–16.15.

Kontrollskrivningen består av 2 uppgifter à 3 poäng. För godkänt krävs 4 poäng.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, och ordentligt skrivna. Tillåtna hjälpmedel är kursboken samt Beta.

Lycka till!

1. Lösningarna $y(x)$ till differentialekvationen
$$2y'' + xy' + y = 0$$
kan potensserieutvecklas vid $x = 0$ som $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Bestäm det samband som ger a_{n+2} uttryckt i a_{n+1} och a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Bestäm koefficienterna $a_0, a_1, \ldots, a_4$ för den lösning $y_1(x)$ som uppfyller $y_1(0) = 1$ och $y_1'(0) = 0$.

Lösning. Om $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ så är
$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
och
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$
Sätter vi in detta i differentialekvationen får vi
$$\begin{aligned} 2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \\ \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0. \end{aligned}$$

Vi skiftar summationsindex $n-2 \rightsquigarrow n$ i den första summan,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n &= \\
2\cdot 2\cdot 1\cdot a_2\cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n & \\
+\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n & \\
+a_0\cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n &= \\
\big[4a_2+a_0\big] + \sum_{n=1}^{\infty}\big[2(n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n+a_n\big]\cdot x^n &= \\
\big[4a_2+a_0\big] + \sum_{n=1}^{\infty}\big[2(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n\big]\cdot x^n &= 0.
\end{aligned}$$

För att denna ekvation ska vara uppfylld måste

$$4a_2+a_0=0$$

samt

$$2(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

Detta är det samma som

$$\boxed{a_{n+2}=-\frac{1}{2(n+2)}a_n, \quad n=0,1,2,\ldots.}$$

För lösningen $y_1(x)$ har vi

$$1=y_1(0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n0^n=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0^2+\cdots=a_0$$

samt

$$0=y_1'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n0^{n-1}=1\cdot a_1+2\cdot a_2\cdot 0+3\cdot a_3\cdot 0^2+\cdots=a_1$$

så $\boxed{a_0=1}$ och $\boxed{a_1=0.}$ Detta ger

$$\boxed{a_2=-\frac{1}{2(0+2)}a_0=-\frac{1}{4},} \quad \boxed{a_4=-\frac{1}{2(2+2)}a_2=\frac{1}{32}}$$

samt

$$\boxed{a_3 = -\frac{1}{2(0+2)}a_1 = 0.}$$

Lösningen $y_1(x)$ ser ut som

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{32}x^4 + \{\text{högre termer}\}.$$

2. Lösningen $y(t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = r(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

kan skrivas som en faltning $y = g * r$ för någon funktion g.

Bestäm denna funktion.

Lösning. Vi Laplacetransformerar problemet. Låt $Y(s), R(s)$ vara Laplacetransformerna av $y(t), r(t)$. Ekvationen transformeras till

$$\begin{aligned} \big[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\big] + 2\big[sY(s) - y(0)\big] + 2Y(s) &= \\ (s^2 + 2s + 2)Y(s) &= R(s), \end{aligned}$$

eller

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \cdot R(s) = G(s) \cdot R(s).$$

Faltningsformeln för Laplacetransformen (Beta L12, sid 326) ger oss lösningen $y(t)$ som en faltning

$$y(t) = (g * r)(t)$$

där $g(t)$ är den funktion som har transform

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}.$$

Beta formel L46, sid 328 (med a=b=1), säger att

$$\boxed{g(t) = e^{-t}\sin t.}$$