Institutionen för Matematik
KTH
Mattias Dahl

Tentamen, Matematik påbyggnadskurs, 5B1304
Torsdag 27/5 2004 kl. 14.00–19.00
Lösningar

1. Lös differentialekvationen

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3, \quad x > 0.$$

Lösning: Motsvarande homogena ekvation

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$

eller

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

är en Euler-Cauchy-ekvation med lösningarna

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2 \ln x,$$

se kursboken sid. 95. Vi skriver om ekvationen i problemet som

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = x.$$

Metoden med "variation av parametrar" (sid. 108) ger att

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

är en partikulärlösning om

$$u(x) = -\int \frac{y_2 \cdot x}{W}dx, \quad v(x) = \int \frac{y_1 \cdot x}{W}dx.$$

Här ges Wronskideterminanten W av

$$W = \det \begin{pmatrix} x^2 & x^2 \ln x \\ 2x & 2x\ln x + x \end{pmatrix} = x^3.$$

Vi beräknar

$$u(x) = -\int \frac{x^2 \ln x \cdot x}{x^3}dx = -\int \ln x dx = -x\ln x + x$$

och

$$v(x) = \int \frac{x^2 \cdot x}{x^3}dx = \int 1 dx = x.$$

En partikulärlösning är alltså

$$y_p(x) = (-x \ln x + x) \cdot x^2 + x \cdot x^2 \ln x = x^3$$

och den allmänna lösningen är

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x^2 \ln x + x^3}$$

där c_1, c_2 är konstanter.

2. Differentialekvationen

$$2xy'' + y' + xy = 0$$

har två linjärt oberoende lösningar y_1, y_2. Nära $x = 0$ kan dessa utvecklas i serier som

$$y_1(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{och} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

där $a_0 = 1$ och $b_0 = 1$. Bestäm talet r och koefficienterna a_n, b_n, $n \geq 1$.

Lösning: Vi ansätter en serielösning på formen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Då är

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2},$$

vilket insatt i ekvationen ger

$$\begin{aligned} 0 &= 2xy'' + y' + xy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}. \end{aligned}$$

För att få termer med samma potens av x skiftar vi index $n+1 \to n-1$ i den sista summan:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r-1}. \end{aligned}$$

Detta är det samma som

$$\begin{aligned} 0 &= \left(2r(r-1)a_0 + ra_0\right) x^{r-1} \\ &\quad + \left(2(r+1)ra_1 + (r+1)a_n\right) x^r \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left(2(n+r)(n+r-1)a_n + (n+r)a_n + a_{n-2}\right) x^{n+r-1} \\ &= a_0 r(2r-1)x^{r-1} \\ &\quad a_1(2r^2+3r+1)x^r \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+r)(2n+2r-1)a_n + a_{n-2}\right) x^{n+r-1}. \end{aligned}$$

För att vi ska få en lösning måste koefficienterna framför de olika potenserna av x vara noll. Från termen med x^{r-1} får vi att $r=0$ eller $r=\frac{1}{2}$ eftersom a_0 antas vara skilt från noll. Vi räknar vidare med fallet $\boxed{r = \frac{1}{2}}$ som ger lösningen y_1. Termen med x^r ger att $\boxed{a_1 = 0}$ och termerna med x^{n+r-1} ger sedan

$$\boxed{a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.}$$

De första koefficienterna a_n i utvecklingen av $y_1(x)$ blir alltså

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -\frac{a_0}{2(2\cdot 2+1)} = -\frac{1}{2\cdot 5}, a_3 = 0, a_4 = -\frac{a_2}{4(2\cdot 4+1)} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9}, \ldots.$$

Vi tittar nu på fallet $r=0$ och döper om koefficienterna till b_n. Termen med x^r ger igen att $\boxed{b_1 = 0}$ och från termerna med x^{n+r-1} får vi

$$\boxed{b_n = -\frac{b_{n-2}}{n(2n-1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.}$$

De första koefficienterna b_n i utvecklingen av $y_2(x)$ är

$$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = -\frac{b_0}{2(2\cdot 2 - 1)} = -\frac{1}{2\cdot 3}, b_3 = 0, b_4 = -\frac{b_2}{4(2\cdot 4 - 1)} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7}, \ldots.$$

3. Hitta en analytisk funktion $f(z)$, $z = x + iy$, vars realdel är
   a) $u(x, y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2$
   b) $u(x, y) = 3x^2 + 4xy - 3y^2$

   eller förklara varför någon sådan funktion ej existerar.

Lösning: a) Eftersom u ej är harmonisk,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6 + 4 = 10 \neq 0$$

så kan u ej vara realdelen av en analytisk funktion.
b) Funktionen u är realdelen av en analytisk funktion $f = u+iv$ om u och v uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. Den första av dessa ger

$$6x + 4y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

eller

$$v = 6xy + 2y^2 + c(x)$$

där $c(x)$ är någon funktion av x. Den andra av Cauchy-Riemanns ekvationer ger sedan att

$$4x - 6y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(6y + c'(x)\right)$$

eller $c'(x) = -4x$ vilket är uppfyllt tex. om $c(x) = -2x^2$. Vi har alltså hittat en imaginärdel $v = -2x^2 + 6xy + 2y^2$ och u är realdelen till den analytiska funktionen

$$\boxed{f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = (3x^2 + 4xy - 3y^2) + i(-2x^2 + 6xy + 2y^2).}$$

4. Låt funktionen $f(x)$ vara definierad av $f(x) = 0$ om $-1 \leq x < 0$ och $f(x) = 1$ om $0 \leq x \leq 1$. Bestäm det polynom $p(x)$ av grad 3 som ger den bästa approximationen av $f(x)$ i kvadratiskt medelfel, dvs det polynom av grad 3 för vilken integralen

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - p(x)|^2 \, dx$$

är så liten som möjligt.

Lösning: Legendrepolynomen utgör ett ortogonalt system av polynom på intervallet $[-1, 1]$ med viktsfunktion $w(x) = 1$. Den eftersökta bästa approximationen fås av Legendreutvecklingen av $f(x)$ i $P_0, \dots, P_3$, se Beta 12.1, 12.2, kursboken 4.8. Koefficienterna c_n i utvecklingen

$$\sum_{n=0}^{3} c_n P_n(x)$$

ges av

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 1\cdot 1dx = \frac{1}{2},\\
c_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_1(x)dx = \frac{3}{2}\int_{0}^{1} 1\cdot xdx = \frac{3}{4},\\
c_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)dx = \frac{5}{2}\int_{0}^{1} 1\cdot \frac{3x^2-1}{2}dx = 0,\\
c_3 &= \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_3(x)dx = \frac{7}{2}\int_{0}^{1} 1\cdot \frac{5x^3-3x}{2}dx = -\frac{7}{16}.
\end{aligned}$$

Det polynom av grad 3 som approximerar $f(x)$ med minsta kvadratiska medelfel är

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot P_0(x) + \frac{3}{4}\cdot P_1(x) + 0\cdot P_2(x) - \frac{7}{16}\cdot P_2(x)\\
=\ &\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{7}{16}\cdot\frac{5x^3-3x}{2}\\
=\ &\boxed{\frac{1}{2} + \frac{45}{32}x - \frac{35}{32}x^3.}
\end{aligned}$$

5. Cirkelskivan D ges i polära koordinater av $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Randen till D hålls vid temperaturen $u(1, \theta) = 1$ för $0 \le \theta < \pi$ och $u(1, \theta) = -1$ för $\pi \le \theta < 2\pi$. Värmen i det inre av D stabiliserar sig till ett stationärt tillstånd där temperaturen i punkten (r, θ) ges av funktionen $u(r, \theta)$. Denna funktion uppfyller

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Bestäm $u(r, \theta)$ med hjälp av variabelseparation.

Lösning: Vi ansätter $u(r, \theta) = F(r)G(\theta)$ där funktionen $G(\theta)$ uppfyller $G(0) = G(2\pi)$ och sätter in detta i differentialekvationen:

$$\Delta u = F''G + \frac{1}{r}F'G + \frac{1}{r^2}FG'' = 0.$$

När vi separerar variablerna får vi

$$\frac{r^2F'' + rF'}{F} = -\frac{G''}{G}.$$

Eftersom vänsterledet i denna likhet bara beror av r medan högerledet bara beror av θ så måste båda leden vara konstanta. Om vi kallar den gemensamma konstanten för k så får vi ekvationerna

$$G'' + kG = 0$$

och

$$r^2F'' + rF' - kF = 0.$$

Eftersom $G(0) = G(2\pi)$ så kan vi bara få icketriviala lösningar till den första ekvationen om $k = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dessa lösningar är

$$G_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta).$$

Motsvarande ekvation för F är

$$r^2F'' + rF' - n^2F = 0,$$

detta är en Euler-Cauchy-ekvation med lösningarna

$$F(r) = r^n, \quad F(r) = r^{-n}$$

(eller $F(r) = 1$, $F(r) = \ln r$ om $n = 0$.) Eftersom vi ska beskriva en värmefördelning så förkastar vi de obegränsade lösningarna $F(r) = r^{-n}$, $F(r) = \ln r$. Vi har nu hittat följande lösningar till ekvationen $\Delta u = 0$:

$$u_n(r,\theta) = r^n \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Eftersom ekvationen är linjär så är också summan

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right)$$

en lösning. Vi ska nu välja konstanterna a_n, b_n så att randvillkoret

$$u(1,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right) = \begin{cases} 1, & 0 \le \theta < \pi \\ -1, & -\pi \le \theta < 0 \end{cases}$$

blir uppfyllt. Denna Fourierserieutveckling finns i Exempel 1, sid 532, Fourierkoefficienterna ges av

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right).$$

Den sökta värmefördelningen ges av

$$\boxed{u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) r^n \sin(n\theta)}$$

eller

$$\boxed{u(r,\theta) = \frac{4}{\pi}\left(r\sin(\theta) + \frac{r^3}{3}\sin(3\theta) + \frac{r^5}{5}\sin(5\theta) + \dots\right).}$$

6. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2-4x+5\right)}dx$$

med hjälp av residykalkyl.

Lösning: Kalla integranden för f:

$$f(z) = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2-4z+5\right)}$$

Eftersom $f(z)$ är en rationell funktion där nämnaren är 6 grader högre än täljaren så ges den oegentliga integralen av gränsvärdet

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

Om vi till denna integral från $-R$ till R lägger integralen längs den halvcirkel S_R som ligger i övre halvan av det komplexa talplanet med radie R och centrum i origo så får vi en integral runt en sluten kurva. Om talet R är tillräckligt stort så innesluter denna kurva alla singulära punkter till $f(z)$ i övre halvplanet (observera att $f(z)$ ej har singulära punkter på den reella linjen). Enligt residysatsen ges integralen runt denna slutna kurva av

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{S_R} f(z)dz = 2\pi i \cdot \{\text{Summan av residyerna i övre halvplanet}\}.$$

Funktionen $f(z)$ har singulariteter i de punkter där nämnaren är noll, dvs. i $z = \pm i$ (dubbla poler) och i $z = 2 \pm i$ (enkla poler). Av dessa så ligger $z = i$ och $z = 2 + i$ i övre halvplanet. Residyn i den enkla polen $z = 2 + i$ beräknas med formel (3), sid 782 i kursboken:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=2+i} f(z) &= \lim_{z\to 2+i}(z-(2+i))f(z) \\
&= \lim_{z\to 2+i}\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2\left(z-(2-i)\right)} \\
&= \frac{1}{\left((2+i)^2+1\right)^2\left((2+i)-(2-i)\right)} \\
&= -\frac{1}{64}.
\end{aligned}$$

Residyn i den dubbla polen $z = i$ beräknas med formel (5*), sid 784:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z\to i} \left[(z-i)^2 f(z)\right]' \\
&= \lim_{z\to i} \left[\frac{1}{(z+i)^2(z^2-4z+5)}\right]' \\
&= \lim_{z\to i} -\frac{1}{(z+i)^4(z^2-4z+5)^2} \cdot \big(2(z+i)(z^2-4z+5) + (z+i)^2(2z-4)\big) \\
&= -\frac{1}{(i+i)^4(i^2-4i+5)^2} \cdot \big(2(i+i)(i^2-4i+5) + (i+i)^2(2i-4)\big) \\
&= \frac{1}{64}(1-4i).
\end{aligned}$$

Beloppet av integralen längs S_R är begränsat av $CR^{-6} \cdot \pi R = C\pi R^{-5}$ så denna integral går alltså mot noll då $R \to \infty$. Vi har alltså

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{S_R} f(z)dz\right) \\
&= 2\pi i \cdot (\operatorname{Res}_{z=2+i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=i} f(z)) \\
&= 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{64} + \frac{1}{64}(1-4i)\right) \\
&= \boxed{\frac{\pi}{8}.}
\end{aligned}$$

7. Bestäm flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(2y + x^2, -z - yx, -z(2+x)\big)$$

genom ytan S som ges av $x^2+y^2+z^2 = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, i den normalriktning $\hat{\mathbf{n}}$ som har $\hat{\mathbf{n}}_x \geq 0$.

Lösning: Vi ska beräkna

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA.$$

Låt S_{xz} vara den halvcirkel i xz-planet som ges av $x^2 + z^2 \leq 2$, $x \geq 0$ och låt S_{yz} vara halvcirkeln i yz-planet som ges av $y^2 + z^2 \leq 2$, $y \geq 0$. Ytstyckena S, S_{xz}, S_{yz} begränsar tillsammans en kropp T. Denna kropp T består av den fjärdedel av klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ som har $x \geq 0$, $y \geq 0$. Den givna enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ till S pekar ut ur T, låt S_{xz} och S_{yz} också ha enhetsnormaler som pekar ut ur T. Divergenssatsen säger oss att

$$\begin{aligned}
& \iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA + \iint_{S_{xz}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA + \iint_{S_{yz}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA \\
= \; & \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}dV \\
= \; & \iiint_T (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\cdot\big(2y + x^2, -z - yx, -z(2+x)\big)\, dV \\
= \; & \iiint_T (2x - x - 2 - x)dV \\
= \; & -2\iiint_T dV \\
= \; & -2\cdot\{\text{volymen av } T\} \\
= \; & -2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4\pi(\sqrt{2})^3}{3} \\
= \; & -\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Vi beräknar flödena genom S_{xz} och S_{yz}. För S_{xz} är $\hat{\mathbf{n}} = (0, -1, 0)$ och fältet $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F} = (x^2, -z, -z(2+x))$ så $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}} = z$. Flödet genom S_{xz} är

$$\iint_{S_{xz}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA = \iint_{S_{xz}} z dx dz$$

och denna integral är lika med noll av symmetriskäl. För S_{yz} är $\hat{\mathbf{n}} = (-1, 0, 0)$, $\mathbf{F} = (2y, -z, -2z)$ och $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}} = -2y$. Flödet genom S_{yz} blir

$$\begin{aligned}
\iint_{S_{yz}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA &= \iint_{S_{yz}} -2y dy dz \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}} -2r\sin(\theta) r dr d\theta \\
&= -2\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\cdot\int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr \\
&= -\frac{8\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Insatt i beräkningen med Divergenssatsen ger detta

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA + 0 - \frac{8\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\pi\sqrt{2}}{3},$$

så

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(2-\pi\right).}$$