TENTAMEN 5B1304, 12/1 - 2005.

LÖSNINGAR

---

1. Detta är en inhomogen Euler-Cauchy-ekv. Lösningarna till motsvarande homogena ekvation är linjärkombinationer av

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^{1/2}, \quad y_3 = x^{3/2}.$$

Genom "variation av parametrar", (7) sid 140, hittar vi en partikulärlösning

$$y_p = \frac{1}{90} x^{11/2}.$$

Den allmänna lösningen är

$$y = c_1 x + c_2 x^{1/2} + c_3 x^{3/2} + \frac{1}{90} x^{11/2}.$$

---

2. Denna typ av ekvation löses med Frobenius metod, se sid 211.

Vi ansätter $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$

vilket ger ekvationen

(2) $a_0 r(r+1) x^{r-1} + a_1 (r+1)(r+2) x^r$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} \left[4a_m + a_{m+2}(m+r+2)(m+r+3) \right] x^{m+r+1}$$

$$= 0.$$

Eftersom a_0 antas vara skiljd från noll så är $\underline{r=0}$ eller $\underline{r=1}$.

Vi tittar först på fallet $r=0$, då är

$$a_1 = 0$$
$$a_{m+2} = -\frac{4}{(m+2)(m+3)} a_m, \quad m \geq 0.$$

Vi antar att $a_0 = 1$, då får vi

$a_m = 0$ för alla udda m,

$$a_2 = -\frac{2^2}{3!}, \quad a_4 = \frac{2^4}{5!}, \quad a_6 = -\frac{2^6}{7!}, \ \ldots\ldots$$

vilket ger lösningen

$$y_0 = 1 - \frac{2^2}{3!}x^2 + \frac{2^4}{5!}x^4 - \frac{2^6}{7!}x^6 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{3!}(2x)^2 + \frac{1}{5!}(2x)^4 - \frac{1}{7!}(2x)^6 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2x}\left((2x) - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{5!}(2x)^5 - \frac{1}{7!}(2x)^7 + \ldots \right)$$

$$= \frac{1}{2x}\sin(2x).$$

③ För fallet $r = -1$ får vi

$$a_{m+2} = -\frac{4}{(m+1)(m+2)} a_m, \quad m \geq 0.$$

Eftersom vi endast behöver ytterligare en linjärt oberoende lösning så sätter vi $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Då blir

$a_m = 0$, m udda,

$$a_2 = -\frac{2^2}{2!}, \quad a_4 = \frac{2^4}{4!}, \quad a_6 = -\frac{2^6}{6!}, \ldots$$

vilket ger lösningen

$$y_1 = x^{-1} - \frac{2^2}{2!} x + \frac{2^4}{4!} x^3 - \frac{2^6}{6!} x^5 + \ldots$$

$$= x^{-1}\left(1 - \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 - \frac{1}{6!}(2x)^6 + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cos(2x).$$

---

3. a) Eftersom u ej är harmonisk,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8(x^2 + y^2) \neq 0$$

Så kan u ej vara realdelen av en analytisk funktion.

④ b) Funktionen u är realdelen av en analytisk funktion $f = u + iv$ om u och v uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. Den första av dessa ger

$$\cos x \cosh y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

eller

$$v = \cos x \sinh y + c(x)$$

där $c(x)$ är någon funktion av x. Den andra av Cauchy-Riemanns ekvationer ger att

$$\sin x \sinh y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(-\sin x \sinh y + c'(x)\right)$$

Vilket är uppfyllt tex. om $c(x) \equiv 0$. Funktionen u är realdelen till den analytiska funktionen

$$f(x,y) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

---

4. Det sökta polynomet ges av utvecklingen av funktionen $f(x)$ i Legendrepolynom till och med grad 3, se Beta 12.1, 12.2.

Koefficienterna c_n i utvecklingen $\sum_{n=0}^{3} c_n P_n(x)$ ges av

⑤

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, P_0(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} x^2 \cdot 1\, dx$$

$$= \frac{1}{6},$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, P_1(x)\, dx = \frac{3}{2}\int_{0}^{1} x^2 \cdot x\, dx$$

$$= \frac{3}{8},$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_2(x) dx = \frac{5}{2}\int_{0}^{1} x^2 \cdot \frac{3x^2-1}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3},$$

$$c_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, P_3(x)\, dx = \frac{7}{2}\int_{0}^{1} x^2\, \frac{5x^3-3x}{2}\, dx$$

$$= \frac{7}{48},$$

Det polynom av grad 3 som approximerar $f(x)$ med minsta kvadratiska medelfel är

$$\frac{1}{6}\cdot P_0 + \frac{3}{8}\cdot P_1 + \frac{1}{3}\cdot P_2 + \frac{7}{48}\cdot P_3$$

$$= \frac{15}{96}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{35}{96}x^3.$$

---

(6) 5. Man ser att $u(x,t) = \sin x$ löser värmeledningsekvationen samt randvillkoren (men ej begynnelsevillkoret.)

Sätt $u(x,t) = v(x,t) + \sin x$, då uppfyller $v(x,t)$ följande:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ v(0,t) = v(2\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Ekvation (10) sid 602 säger oss att

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

så

$$u(x,t) = \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Begynnelsevillkoret säger nu att

$$u(x,0) = (B_1 + 1)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin(nx)$$

$$= \begin{cases} 1 & 0 \le x < \pi \\ -1 & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

7

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{enl. ex. 1} \\ \text{sid 532} \end{matrix} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1-(-1)^n) \sin(n\pi)$$

För $n=1$ får vi

$$B_1 + 1 = \frac{4}{\pi}, \quad B_1 = \frac{4}{\pi} - 1,$$

och för $n \geq 2$ är

$$B_n = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

Lösningen är

$$u(x,t) = \sin x + \left(\frac{4}{\pi} - 1\right) e^{-t} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

---

6. Vi beräknar denna "Fourierintegral" med hjälp av formel (10) sid 790:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2+1)^2} = -2\pi \sum \operatorname{Im} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}\right)$$

där summan är över alla poler i det övre halvplanet.

Funktionen $\dfrac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}$ har poler i punkterna $z = \pm i$. Endast $z = i$

⑧

ligger i övre halvplanet. Ekvation (5*) sid 784 ger oss

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}\right) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)^2\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}\right]'$$

$$= \lim_{z\to i}\left[\frac{e^{2iz}}{(z+i)^2}\right]'$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{e^{2iz}}{(z+i)^3}\cdot\left(2i(z+i)-2\right) = \frac{-3e^{-2}}{4} i$$

Imaginärdelen av detta är $-\frac{3e^{-2}}{4}$, så integralens värde är

$$-2\pi\cdot\left(-\frac{3e^{-2}}{4}\right) = \frac{3\pi e^{-2}}{4}.$$

---

7. Vi sluter ytan S genom att lägga till ytstycket S_1 som ges av

$x^2+y^2\le 1$, $z=1$. $S+S_1$ omsluter då kroppen V: $x^2+y^2\le z^2\le 1$, $z\ge 0$.

Divergenssatsen ger oss att

$$\oint\!\!\!\oint_{S+S_1} F\cdot\hat{n}\,dA = \iiint_V \operatorname{div} F\,dV =$$

⑨ $$= \iiint_V 2z\, dV = \iint_{r\le 1} \left(\int_{z=r}^{1} 2z\,dz \right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \iint_{r\le 1} (1-r^2)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^1 r - r^3\, dr = \frac{\pi}{2}.$$

Flödet genom ytstycket S_1 ges av

$$\iint_{S_1} F\cdot\hat{n}\, dS \quad \text{där } \hat{n} = (0,0,1).$$

På S_1 är $F(x,y,1) = (-e^{-y}, e^{x}, 1)$ så vi får

$$\iint_{S_1} F\cdot\hat{n}\, dS = \iint_{S_1} (-e^{-y}, e^{x}, 1)\cdot(0,0,1)\, dS$$

$$= \iint_{S_1} 1\, dS = \left\{ \begin{array}{c} \text{arean} \\ \text{av } S_1 \end{array} \right\} = \pi.$$

Tillsammans har vi

$$\frac{\pi}{2} = \iint_S F\cdot\hat{n}\,dS + \pi,$$

så det sökta flödet är

$$\iint_S F\cdot\hat{n}\,dS = -\frac{\pi}{2}.$$