Institutionen för Matematik
KTH
Mattias Dahl

**Tentamen, Matematik påbyggnadskurs, 5B1304**
**Onsdag 12/1 2005 kl. 14.00–19.00**

Tentamen består av 7 uppgifter uppgifter à 3 poäng. För betyg 3 erfordras minst 10 poäng, för betyg 4 minst 14 poäng och för betyg 5 minst 18 poäng.

Tillåtna hjälpmedel är kursboken "Advanced Engineering Mathematics", "Beta Mathematics Handbook", kurslitteratur från tidigare matematikkurser, föreläsningsanteckningar samt räknedosa utan "Computer Algebra System" (= automatisk formelbehandling).

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, och ordentligt skrivna.

*Lycka till!*

1. Lös differentialekvationen
$$x^3y''' + \frac{3}{4}xy' - \frac{3}{4}y = x^{11/2}, \quad x > 0.$$

2. Hitta två linjärt oberoende serielösningar till differentialekvationen
$$xy'' + 2y' + 4xy = 0.$$
Försök att identifiera serierna som kända funktioner.

3. Hitta en analytisk funktion $f(z)$, $z = x + iy$, vars realdel är
   a) $u(x, y) = (x^2 - y^2)^2$,
   b) $u(x, y) = \sin x \cosh y$,
   
   eller förklara varför någon sådan funktion ej existerar.

4. Låt funktionen $f(x)$ vara definierad av $f(x) = 0$ om $-1 \le x < 0$ och $f(x) = x^2$ om $0 \le x \le 1$. Bestäm det polynom $p(x)$ av grad 3 som ger den bästa approximationen av $f(x)$ i kvadratiskt medelfel, dvs det polynom av grad 3 för vilken integralen
$$\int_{-1}^{1} |f(x) - p(x)|^2 \, dx$$
är så liten som möjligt.

5. Lös det inhomogena värmeledningsproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq t,$$
$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \quad 0 \leq t,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi, \\ -1 & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

(Ledning: sök en partikulärlösning som ej beror av $t$.)

6. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2+1)^2} dx$$

med hjälp av residykalkyl.

7. Beräkna flödet av av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (-e^{yz}, e^{xz}, z^2)$$

genom ytstycket $S$ som ges av $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, i den normalriktning $\hat{\mathbf{n}}$ som har $\hat{\mathbf{n}}_z < 0$.