Institutionen för Matematik
KTH
Mattias Dahl

Tentamen, Matematik påbyggnadskurs, 5B1304
fredag 20/8 2004 kl. 14.00–19.00

Tentamen består av 7 uppgifter uppgifter à 3 poäng. För betyg 3 erfordras minst 10 poäng, för betyg 4 minst 14 poäng och för betyg 5 minst 18 poäng.

Tillåtna hjälpmedel är kursboken "Advanced Engineering Mathematics", "Beta Mathematics Handbook", kurslitteratur från tidigare matematikkurser, föreläsningsanteckningar samt räknedosa utan "Computer Algebra System" (= automatisk formelbehandling).

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, och ordentligt skrivna.

Lycka till!

1. Lös differentialekvationen
$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x, \quad x > 0.$$

2. Hitta två linjärt oberoende serielösningar till differentialekvationen
$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$
Försök att identifiera serierna som kända funktioner.

3. Vilka av följande funktioner är analytiska?
   a) $f(z) = \mathrm{Re}(z^2) - i\,\mathrm{Im}(z^2)$,
   b) $f(z) = \mathrm{Im}(z^2) - i\,\mathrm{Re}(z^2)$.
   Motivera noggrannt.

4. Låt $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n^3}$. I Beta ser vi att $f(t) = \frac{\pi^2 t}{6} - \frac{\pi t^2}{4} + \frac{t^3}{12}$ för $0 < t < 2\pi$.
   a) Beräkna $f(\frac{11\pi}{2})$.
   b) Summera med hjälp av Parsevals formel serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

5. Värmefördelningen $u(x,t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$ i en halvoändlig isolerad stång som initialt har temperatur 0 och värms upp i sin ändpunkt beskrivs av följande randvärdesproblem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = 0, x \geq 0, \quad u(0,t) = f(t), t \geq 0, \quad \lim_{x \to \infty 0} u(x,t) = 0, t \geq 0,$$

där $f(t)$ beskriver den temperatur som ändpunkten ges vid tiden t. Visa att $u(x,t)$ kan beräknas som en faltning ("convolution") av $f(t)$ med en funktion $k_x(t)$ samt bestäm denna funktion. (Ledning: Laplacetransformera i t.)

6. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + 4\cos\theta}{17 - 8\cos\theta} d\theta$$

med hjälp av residykalkyl.

7. Låt Γ vara skärningskurvan mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och planet $x + z = 1$ med orientering sådan att projektionen av Γ på xy-planet är positivt orienterad. Låt vektorfältet $\mathbf{F}$ vara definierat av

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2x^2e^{xz} + z^2, 2yze^{xz} + xz, y^2(1+xz)e^{xz} + 2xy).$$

a) Visa att $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (x, 2z - 2y, z)$. (I kursboken betecknas "rot" med "curl".)

b) Beräkna $\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.