Institutionen för Matematik
KTH
Mattias Dahl

Tentamen, Matematik påbyggnadskurs, 5B1304
fredag 20/8 2004 kl. 14.00–19.00
Lösningar

1. Lös differentialekvationen

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x, \quad x > 0.$$

Lösning: Motsvarande homogena ekvation är en Euler-Cauchy-ekvation med den allmänna lösningen $y_h(x) = C_1x^{-1} + C_2x + C_3x^2$. För att lösa den ickehomogena ekvationen så använde vi metoden med "variation av parametrar" (kursboken sid 140). Vi skriver om ekvationen som

$$y''' + x^{-1}y'' - 2x^{-2}y' + 2x^{-3}y = \ln x, \quad x > 0.$$

En partikulärlösning ges av

$$y_p(x) = y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W(x)}r(x)dx + y_2(x)\int \frac{W_2(x)}{W(x)}r(x)dx + y_3(x)\int \frac{W_3(x)}{W(x)}r(x)dx$$

där $r(x) = \ln x$ och de olika Wronskideterminanterna tillhörande $y_1(x) = x^{-1}$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x^2$ är

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} x^{-1} & x & x^2 \\ -x^{-2} & 1 & 2x \\ 2x^{-3} & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6x^{-1}, \quad W_1(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = x^2,$$

$$W_2(x) = \det\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 & x^2 \\ -x^{-2} & 0 & 2x \\ 2x^{-3} & 1 & 2 \end{pmatrix} = -3, \quad W_3(x) = \det\begin{pmatrix} x^{-1} & x & 0 \\ -x^{-2} & 1 & 0 \\ 2x^{-3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x^{-1}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= x^{-1}\int \frac{x^2}{6x^{-1}}\ln x dx + x\int \frac{-3}{6x^{-1}}\ln x dx + x^2\int \frac{2x^{-1}}{6x^{-1}}\ln x dx \\
&= \frac{x^{-1}}{6}\int x^3 \ln x dx - \frac{x}{2}\int x \ln x dx + \frac{x^2}{3}\int \ln x dx \\
&= \frac{x^{-1}}{6}\cdot x^4\left(\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16}\right) - \frac{x}{2}\cdot x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{x^2}{3}\cdot x(\ln x - 1) \\
&= \frac{x^3 \ln x}{8} - \frac{7x^3}{32}.
\end{aligned}$$

Tillsammans ger detta den allmänna lösningen

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1x^{-1} + C_2x + C_3x^2 + \frac{x^3 \ln x}{8} - \frac{7x^3}{32}}$$

Där C_1, C_2, C_3 är godtyckliga konstanter.

2. Hitta två linjärt oberoende serielösningar till differentialekvationen

$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$

Försök att identifiera serierna som kända funktioner.

Lösning: Vi försöker hitta lösningar på formen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

där $a_0 \neq 0$. Derivatorna av $y(x)$ är

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1}$$

och

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}.$$

Sätter vi in dessa i ekvationen så får vi

$$\begin{aligned}
0 &= 4xy'' + 2y' + y \\
&= 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(4n+4r-2)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \\
&= a_0 r(4r-2)x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1+r)(4n+4r+2)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \\
&= a_0 r(4r-2)x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1}(n+1+r)(4n+4r+2) + a_n)x^{n+r}.
\end{aligned}$$

Eftersom $a_0 \neq 0$ så måste $r(4r-2) = 0$, dvs. $r = 1/2$ eller $r = 0$. Vi studerar först fallet $r = 1/2$. Koefficienterna framför $x^{n+1/2}$ måste alla vara noll, dvs

$$a_{n+1}(n+1+r)(4n+4r+2) + a_n = 0$$

eller

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+3)(2n+2)}$$

för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Med detta samband kan vi beräkna de första termerna

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{a_0}{3 \cdot 2}, \\
a_2 &= -\frac{a_1}{5 \cdot 4} = \frac{a_0}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}, \\
a_3 &= -\frac{a_2}{7 \cdot 6} = -\frac{a_0}{7!}, \\
a_4 &= -\frac{a_3}{9 \cdot 8} = \frac{a_0}{9!},
\end{aligned}$$

och vi kan gissa att

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

där vi nu har satt $a_0 = 1$. Detta ger lösningen

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{n+1/2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\sqrt{x}\right)^{2n+1} \\
&= \sin\left(\sqrt{x}\right).
\end{aligned}$$

Fallet $r = 0$ ger lösningen

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sqrt{x}\right)^{2n} \\
&= \cos\left(\sqrt{x}\right).
\end{aligned}$$

3. Vilka av följande funktioner är analytiska?

   a) $f(z) = \mathrm{Re}(z^2) - i\,\mathrm{Im}(z^2)$,

   b) $f(z) = \mathrm{Im}(z^2) - i\,\mathrm{Re}(z^2)$.

   Motivera noggrannt.

Lösning: Om $z = x + iy$ så är $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ och $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$. I uppgift a) är

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(-2xy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Eftersom $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq -2x = \frac{\partial v}{\partial y}$ så är Cauchy-Riemanns ekvationer ej uppfyllda, så $f(z)$ är ej analytisk. I uppgift b) har vi

$$f(z) = (2xy) + i(-x^2 + y^2) = u(x, y) + iv(x, y).$$

I detta fall är $\frac{\partial u}{\partial x} = 2y = \frac{\partial v}{\partial y}$ samt $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x = -\frac{\partial v}{\partial x}$ så Cauchy-Riemanns ekvationer är båda uppfyllda och $f(z)$ är analytisk.

4. Låt $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n^3}$. I Beta ser vi att $f(t) = \frac{\pi^2 t}{6} - \frac{\pi t^2}{4} + \frac{t^3}{12}$ för $0 < t < 2\pi$.
   a) Beräkna $f(\frac{11\pi}{2})$.
   b) Summera med hjälp av Parsevals formel serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Lösning: a) Eftersom $f(t)$ är en Fourierserie med bara sin-termer så är $f(t)$ en 2π-periodisk udda funktion. Alltså är

$$\begin{aligned}
f(\frac{11\pi}{2}) &= f(-\frac{\pi}{2} + 3 \cdot 2\pi) \\
&= f(-\frac{\pi}{2}) \\
&= -f(\frac{\pi}{2}) \\
&= -\left(\frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right) \\
&= \boxed{-\frac{\pi^3}{16}.}
\end{aligned}$$

b) Parsevals formel säger att

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 \, dt = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

där a_n, b_n är Fourierkoefficienterna till $f(t)$. I detta fall är $b_n = \frac{1}{n^3}$ alla $a_n = 0$ så

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^2 t}{6} - \frac{\pi t^2}{4} + \frac{t^3}{12} \right)^2 dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{t^6}{144} - \frac{\pi t^5}{24} + \frac{13\pi^2 t^4}{144} - \frac{\pi^3 t^3}{12} + \frac{\pi^4 t^2}{36} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{(2\pi)^7}{144 \cdot 7} - \frac{\pi \cdot (2\pi)^6}{24 \cdot 6} + \frac{13\pi^2 \cdot (2\pi)^5}{144 \cdot 5} - \frac{\pi^3 \cdot (2\pi)^4}{12 \cdot 4} + \frac{\pi^4 \cdot (2\pi)^3}{36 \cdot 3} \right) \\
&= \boxed{\frac{\pi^6}{945}.}
\end{aligned}$$

5. Värmefördelningen $u(x,t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$ i en halvoändlig isolerad stång som initialt har temperatur 0 och värms upp i sin ändpunkt beskrivs av följande randvärdesproblem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(x,0) = 0, x \geq 0, \quad u(0,t) = f(t), t \geq 0, \quad \lim_{x \to \infty 0} u(x,t) = 0, t \geq 0,$$

där $f(t)$ beskriver den temperatur som ändpunkten ges vid tiden t. Visa att $u(x,t)$ kan beräknas som en faltning ("convolution") av $f(t)$ med en funktion $k_x(t)$ samt bestäm denna funktion. (Ledning: Laplacetransformera i t.)

Lösning: Låt $U(x,s)$ vara Laplacetransformen av $u(x,t)$. Då är $sU(x,s) - u(x,0) = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,s)$ eller

$$sU(x,s) = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,s)$$

eftersom $u(x,0) = 0$. Lösningen på denna differentialekvation i x är

$$U(x,s) = C(s) e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x} + D(s) e^{\frac{\sqrt{s}}{c}x}$$

där "integrationskonstanterna" $C(s), D(s)$ får bero av s. För att få en begränsad lösning $U(x,s)$ så måste vi välja $D(s)$ identiskt noll, så

$$U(x,s) = C(s) e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x}.$$

Låt $F(s)$ vara Laplacetransformen av $f(t)$. Eftersom $u(0,t) = f(t)$ så får vi

$$C(s) = U(0,s) = F(s)$$

när vi sätter $x = 0$. Tillsammans ger detta

$$U(x,s) = F(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x}.$$

Eftersom Laplacetransformen $U(x,s)$ är en produkt av transformer så är den ursprungliga funktionen $u(x,t)$ en faltning av motsvarande funktioner, se Beta Laplacetransform L12. $F(s)$ är transformen av $f(t)$ och enligt Beta formel L61 så är $e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x}$ transformen av

$$k_x(t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{x^2}{c^2 t}}.$$

Vi har alltså

$$u(x,t) = f(t) * k_x(t) = \int_0^t f(t-\tau)k_x(\tau)d\tau = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}}\int_0^t f(t-\tau)\tau^{-3/2}e^{-\frac{x^2}{c^2\tau}}d\tau.$$

6. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+4\cos\theta}{17-8\cos\theta}d\theta$$

med hjälp av residykalkyl.

Lösning: Vi gör variabelbytet $z = e^{i\theta}$. Då blir $d\theta = \frac{1}{iz}dz$ och integralen från 0 till 2π överförs till integralen längs kurvan C som är enhetscirkeln med orientering moturs. Vi får

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1+4\cos\theta}{17-8\cos\theta}d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1+2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{17-4(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}d\theta \\
&= \oint_C \frac{1+2(z+z^{-1})}{17-4(z+z^{-1})}\cdot\frac{1}{iz}dz \\
&= \frac{i}{4}\oint_C \frac{2z^2+z+2}{z(z-1/4)(z-4)}dz
\end{aligned}$$

Integranden har poler i punkterna $z = 0$, $z = 1/4$ och $z = 4$. Av dessa ligger $z = 0$ och $z = 1/4$ innanför integrationskurvan C. Enligt formler på sid 782-783 i kursboken är residyn vid $z = 0$ lika med 2 och residyn vid $z = 1/4$ lika med $-\frac{38}{15}$. Residysatsen ger nu att

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1+4\cos\theta}{17-8\cos\theta}d\theta &= \frac{i}{4}\oint_C \frac{2z^2+z+2}{z(z-1/4)(z-4)}dz \\
&= \frac{i}{4}\cdot 2\pi i\cdot\left(2-\frac{38}{15}\right) \\
&= \boxed{\frac{4\pi}{15}.}
\end{aligned}$$

7. Låt Γ vara skärningskurvan mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och planet $x + z = 1$ med orientering sådan att projektionen av Γ på xy-planet är positivt orienterad. Låt vektorfältet $\mathbf{F}$ vara definierat av

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 z^2 e^{xz} + z^2, 2yze^{xz} + xz, y^2(1 + xz)e^{xz} + 2xy).$$

a) Visa att $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (x, 2z - 2y, z)$. (I kursboken betecknas "rot" med "curl".)

b) Beräkna $\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Lösning: a) Enligt formler på sid. 457 i kursboken beräknas $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = (x, 2z - 2y, z)$.

b) Kurvan Γ är en cirkel i planet $x + z = 1$. Låt S vara den cirkelskiva i $x + z = 1$ som begränsas av Γ. Eftersom projektionen av Γ på xy-planet är positivt orienterad så ska enhetsnormalen $\mathbf{n}$ till S ha positiv z-komponent, dvs $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$. Enligt Stokes sats är

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA \\
&= \iint_S (x, 2z - 2y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) dA \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S (x + y) dA \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S dA \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \{\text{Arean av } S\}
\end{aligned}$$

där den näst sista likheten följer av att S ligger i planet $x + z = 1$. För att beräkna arean av cirkelskivan S behöver vi veta dess radie. Vi ser att centrum för S ligger i punkten $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, dessutom ser vi att punkten $(1, 0, 0)$ ligger på randen Γ. Radien är lika med avståndet från centrum till en punkt på randen och blir i detta fall $r = \|(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) - (1, 0, 0)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Detta ger

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \{\text{Arean av } S\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \pi \cdot r^2 = \boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.}$$