Institutionen för Matematik
KTH
Mattias Dahl

Tentamen, Matematik påbyggnadskurs, 5B1304
Torsdag 27/5 2004 kl. 14.00–19.00

Tentamen består av 7 uppgifter uppgifter à 3 poäng. För betyg 3 erfordras minst 10 poäng, för betyg 4 minst 14 poäng och för betyg 5 minst 18 poäng.

Tillåtna hjälpmedel är kursboken “Advanced Engineering Mathematics”, “Beta Mathematics Handbook”, kurslitteratur från tidigare matematikkurser, föreläsningsanteckningar samt räknedosa utan “Computer Algebra System” (= automatisk formelbehandling).

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, och ordentligt skrivna.

Lycka till!

1. Lös differentialekvationen
$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3, \quad x > 0.$$

2. Differentialekvationen
$$2xy'' + y' + xy = 0$$
har två linjärt oberoende lösningar y_1, y_2. Nära $x = 0$ kan dessa utvecklas i serier som
$$y_1(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{och} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$
där $a_0 = 1$ och $b_0 = 1$. Bestäm talet r och koefficienterna a_n, b_n, $n \geq 1$.

3. Hitta en analytisk funktion $f(z)$, $z = x + iy$, vars realdel är
   a) $u(x, y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2$
   b) $u(x, y) = 3x^2 + 4xy - 3y^2$

   eller förklara varför någon sådan funktion ej existerar.

4. Låt funktionen $f(x)$ vara definierad av $f(x) = 0$ om $-1 \leq x < 0$ och $f(x) = 1$ om $0 \leq x \leq 1$. Bestäm det polynom $p(x)$ av grad 3 som ger den bästa approximationen av $f(x)$ i kvadratiskt medelfel, dvs det polynom av grad 3 för vilken integralen
$$\int_{-1}^{1} |f(x) - p(x)|^2 \, dx$$
är så liten som möjligt.

5. Cirkelskivan D ges i polära koordinater av $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Randen till D hålls vid temperaturen $u(1,\theta) = 1$ för $0 \leq \theta < \pi$ och $u(1,\theta) = -1$ för $\pi \leq \theta < 2\pi$. Värmen i det inre av D stabiliserar sig till ett stationärt tillstånd där temperaturen i punkten (r,θ) ges av funktionen $u(r,\theta)$. Denna funktion uppfyller

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Bestäm $u(r,\theta)$ med hjälp av variabelseparation.

6. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2-4x+5\right)} dx$$

med hjälp av residykalkyl.

7. Bestäm flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(2y + x^2, -z - yx, -z(2+x)\big)$$

genom ytan S som ges av $x^2+y^2+z^2 = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, i den normalriktning $\hat{\mathbf{n}}$ som har $\hat{\mathbf{n}}_x \geq 0$.