Lösningar till tentamen den 10/1 2007, 5B1304

1. Substitutionen $y = x^r$ i ekvationen $x^2y'' - xy' + 2y = 0$ ger ekvationen $r^2 - 2r + 2 = 0$, $r = 1 \pm i$.
Den homogena ekvationen har lösningen
$y = C_1 x \cos(\ln x) + C_2 x \sin(\ln x)$.
En partikulärlösning $y_p(x) = ax + b$ sökes $\Rightarrow$
$a = -9$ och $b = 2$.
Den allmänna lösningen är $\underline{y = -9x + 2 + C_1 x \cos(\ln x) + C_2 x \sin(\ln x)}$

2. Låt $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$, där $a_0 \neq 0$. Insättning ger

$$6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + 5x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}$$
$$+ x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \Rightarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(6a_n (n+r)(n+r-1) + 5a_n (n+r) - a_n\right) x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0$$

Vi får

(⊗) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(6(n+r)^2 - (n+r) - 1\right) x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0$$

$n=0 \Rightarrow a_0(6r^2 - r - 1) = 0 \Rightarrow \underline{r = \frac{1}{2} \text{ och } r = -\frac{1}{3}}$

$n=1$ $\quad a_1 \big(\underbrace{6(r+1)^2 - (r+1) - 1}_{\neq 0 \text{ för } r = \frac{1}{2} \text{ och } r = -\frac{1}{3}}\big) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

För $n \geq 2$ (⊗) $\Rightarrow a_n \left(6(n+r)^2 - (n+r) - 1\right) + a_{n-2} = 0$

$$\Rightarrow a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+r)(6n + 6r - 1) - 1}$$

För $r = -\frac{1}{3}$ $\quad a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n - \frac{1}{3})(6n-3) - 1} = \frac{-a_{n-2}}{n(6n-5)}$

$a_2 = \frac{-a_0}{14}$, $a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 19} = \frac{a_0}{1064}$ etc.

En lösning är ($a_0 = 1$)
$$\underline{y = x^{-\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{14}x^2 + \frac{1}{1064}x^4 - \dots\right)}$$

För $r = \frac{1}{2}$ $\quad a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(6n+5)}$ för $n = 2k$, $k = 1, \dots$

$a_2 = -\frac{a_0}{34}$, $a_4 = -\frac{a_2}{116} = \frac{a_0}{3944}$

$$y = x^{1/2}\left(1 - \frac{1}{34}x^2 + \frac{1}{3944}x^4 - \dots\right)$$

3. Om $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ är en analytisk funktion, så uppfyller u och v Cauchy–Riemanns ekvationer $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.
För $u(x,y) = e^x \cos y + x - y$ är $u_x = e^x \cos y + 1 = v_y$
$\Rightarrow v(x,y) = e^x \sin y + y + g(x)$.
Vidare är $v_x = e^x \sin y + g'(x)$ och $u_y = -e^x \sin y - 1$
$\Rightarrow g'(x) = 1$. Imaginärdelen av $f(z)$ är
$v(x,y) = e^x \sin y + y + x + C_1$, C_1 är godt. konstant
$\Rightarrow f(z) = e^x \cos y + x - y + i(e^x \sin y + y + x + C_1)$
$= e^x(\cos y + i \sin y) + x + iy + ix - y + iC_1$
$\underline{f(z) = e^z + (1+i)z}$ är analytisk och $\mathrm{Re}\, f(z) = u(x,y)$

4. Låt $g(t) = e^{-|t|}$. Ekvationen kan då skrivas
$(f * g)(x) = 3e^{-|x|} - e^{-3|x|}$. Genom att Fouriertransformera ekvationen får vi $\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = 3\hat{g}(\omega) - \hat{h}(\omega)$ där $h(x) = e^{-3|x|}$.

$\hat{g}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ och $\hat{h}(\omega) = \frac{6}{9+\omega^2}$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) \cdot \frac{2}{1+\omega^2} = \frac{6}{1+\omega^2} - \frac{6}{9+\omega^2} = 6 \cdot \frac{8}{(1+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

Alltså $\hat{f}(\omega) = \frac{4 \cdot 6}{9+\omega^2}$.

Svar: $\underline{f(x) = 4e^{-3|x|}}$

5. Låt $F(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}$. Då är

$$\mathcal{L}\{u_t(x,t)\} = sF(x,s) - u(x,0) = sF(x,s) - 2\sin x$$

och $\mathcal{L}\{u_{tt}(x,t)\} = s\,\mathcal{L}\{u_t(x,t)\} - u_t(x,0)$

$$= s\left(sF(x,s) - 2\sin x\right) + 2\sin x = s^2F(x,s) - 2s\sin x + 2\sin x.$$

Ekvationen $u_{tt} = u_{xx}$ blir nu

$$(1)\begin{cases} F_{xx}(x,s) = s^2F(x,s) - 2s\sin x + 2\sin x, & 0<x<\pi,\ t>0 \\ \text{Randvillkoren är } F(0,s) = F(\pi,s) = 0. \end{cases}$$

(1) har lösningen $F(x,s) = \dfrac{2s-2}{s^2+1}\sin x$.

Inverstransformering av $F(x,s) = \sin x\left(\dfrac{2s}{s^2+1} - \dfrac{2}{s^2+1}\right)$

ger $\underline{\underline{u(x,t) = 2\sin x(\cos t - \sin t)}}$

6. Funktionen $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2-2iz}$ har två singulära punkter, $z=0$ och $z=2i$, som är enkla poler. Dessa ligger innanför cirkeln $|z|=5$.

Enligt residysatsen är

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{z-2i} = -\frac{1}{2i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z\to 2i} f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{\cos z}{z} = \frac{\cos 2i}{2i}$$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{2i} + \frac{\cos 2i}{2i}\right) = \pi(\cos 2i - 1) = \pi\left(\tfrac{1}{2}(e^{-2}+e^{2}) - 1\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\left(e^{-2}+e^{2}-2\right)}}$$

7. Enligt Stoke's sats är $\iint_S (\nabla\times F)\cdot n\,dS = \oint_C F\cdot dr$

där C är randen av S.

Randen $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=1 \end{cases}$ kan parametriseras $x = 2\cos t$,

$y = 2\sin t$, $z=1$, $t: 0\to 2\pi$.

7. (fortsättning)

$$\iint_S (\nabla\times F)\cdot n\,dS = \oint_C x^2yz\,dx + yz^2\,dy + z^3\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(8\cos^2 t\sin t\cdot(-2\sin t) + 2\sin t\cdot 2\cos t\right)dt$$

$$= -16\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt + 2\int_0^{2\pi}\sin 2t\,dt = -4\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt$$

$$= \underline{\underline{-4\pi}}$$