Lösningar till tentamen den 25/8 2006, 5B1304

1. Insättningen $y = x^r$ i den homogena ekvationen $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$ ger ekvationen $r^2 + 2r - 3 = 0$.
Den homogena ekvationen har lösningen $y = C_1x + C_2x^{-3}$
En partikulärlösning kan sökas på formen $y = Ax^3$.
Då är $x^2 \cdot 6Ax + 3x\, 3Ax^2 - 3Ax^3 = x^3 \Rightarrow 12A = 1$
Den allmänna lösningen är $\underline{\underline{y = C_1x + C_2x^{-3} + \frac{1}{12}x^3}}$.

2. Vi bestämmer koefficienterna $a_0 \neq 0, a_1, \ldots$ så att $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ uppfyller ekvationen.

$$3\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + (2-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)\left(3(n+r-1)+2\right)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r+1)x^{n+r} = 0$$

Med $n = k-1$ blir den andra summan $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}(k+r)x^{k+r-1}$

Vi får nu

$$a_0 r(3r-1)x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(n+r)(3n+3r-1) - a_{n-1}(n+r)\right)x^{n+r-1} = 0$$

$$\Rightarrow a_0 r(3r-1) = 0 \Rightarrow r = 0,\ r = \tfrac{1}{3}$$

$$a_n(n+r)(3n+3r-1) - a_{n-1}(n+r) = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Eftersom $n + r \neq 0$ för $n \geq 1$ $\quad a_n(3n+3r-1) = a_{n-1}$

För $r = 0$ får vi $a_n = \frac{a_{n-1}}{3n-1}$, $a_1 = \frac{a_0}{2}$, $a_2 = \frac{a_0}{10}$, $a_3 = \frac{a_0}{80}, \ldots$ Låt $a_0 = 1$, en lösning är

(1) $\quad y = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{80} + \cdots$

För $r = \frac{1}{3}$ $\quad a_n = \frac{a_{n-1}}{3n} \Rightarrow a_1 = \frac{a_0}{3}$, $a_2 = \frac{a_0}{18} = \frac{a_0}{3^2 \cdot 2}$
$a_3 = \frac{a_0}{3^3 \cdot 6}$, $a_4 = \frac{a_0}{3^4 \cdot 24} = \frac{a_0}{3^4 \cdot 4!}, \ldots$

Om $a_0 = 1$, vi får lösningen

$$y = x^{1/3}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 3!} + \cdots\right) = x^{1/3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

(2) $$= \underline{\underline{x^{1/3}e^{x/3}}}$$

(1) och (2) är linj. oberoende lösningar.

3. a) Enligt Beta är egenvärden $\lambda_n = (n+\frac{1}{2})^2$ och egenfunktionerna $\phi_n(x) = \sin(n+\frac{1}{2})x \quad n = 0, 1, \ldots$

b) $$\|\phi_n\|^2 = \int_0^{\pi}(\phi_n(x))^2dx = \int_0^{\pi}(\sin(n+\tfrac{1}{2})x)^2dx = \frac{\pi}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2}\int_0^{\pi} f(x)\phi_n(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(n+\tfrac{1}{2})x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi(n+\frac{1}{2})}\left[-\cos(n+\tfrac{1}{2})x\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi(2n+1)}\left(1 - \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi(2n+1)}$$

Serien av $f(x) = 1$, $0 \leq x \leq \pi$ m. a. på ortogonalsystemet $\{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ är $\underline{\underline{\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\sin(n+\frac{1}{2})x}}$

4. $$\mathcal{L}\{u_t(x,t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}u_t(x,t)dt = \left[e^{-st}u(x,t)\right]_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} se^{-st}u(x,t)dt = \lim_{t\to\infty} e^{-st}u(x,t) - u(x,0) + s\mathcal{F}(x,s)$$

$= s\mathcal{F}(x,s)$ $\quad$ ($u(x,t)$ antas vara begränsad, $u(x,0) = 0$ är beg. villkoret).

$$\mathcal{L}\{u_{xx}(x,t)\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{F}(x,s)$$

Vi har differentialekv. $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{F}(x,s) = s\mathcal{F}(x,s) \\ u(0,t) = 2 \Rightarrow \qquad \mathcal{F}(0,s) = \frac{2}{s}\end{array}\right\}$

Vi får $\mathcal{F}(x,s) = C_1(s)e^{\sqrt{s}x} + C_2(s)e^{-\sqrt{s}x}$
där $C_1(s) = 0$ för varje s för att $\lim_{x\to\infty}\mathcal{F}(x,s) = 0$.
$\mathcal{F}(0,s) = C_2(s) = \frac{2}{s}$

Laplacetransformen av $u(x,t)$ är $F(x,s) = \frac{2}{s} e^{-\sqrt{s}x}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u(x,t) = 2\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right)}}$$

5. Låt $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x < 0 \end{cases}$ Fouriertransformen av g är $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$. Enligt inversionsformeln

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega} e^{i\omega x} d\omega \underset{(\omega=-t)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-it} e^{-itx} dt$$

Vi visar att integralen existerar som gränsvärdet $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}$.

Imaginärdelen $\operatorname{Im} \frac{1}{1-it} e^{-itx} = \operatorname{Im} \frac{1+it}{1+t^2} e^{-itx}$

$= \frac{t}{1+t^2}\cos tx - \frac{1}{1+t^2}\sin tx$ är udda m.a. på t.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \frac{1}{1-it} e^{-itx} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left(\frac{\cos tx}{1+t^2} + \frac{t\sin tx}{1+t^2}\right) dt$$

$$\to \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos tx}{1+t^2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{t\sin tx}{1+t^2} dt \quad \text{när } a \to \infty.$$

Dessa integraler konvergerar och är (enligt Beta)

$\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & \text{om } x>0 \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{om } x<0 \end{cases}$ resp. $\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & \text{om } x>0 \\ -\frac{1}{2}e^{x} & \text{om } x<0 \end{cases}$.

$$\Rightarrow \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} \frac{1}{2\pi(1-it)} e^{-itx} dt = \begin{cases} e^{-x} & \text{om } x>0 \\ 0 & \text{om } x<0. \end{cases}$$

Svar: $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2\pi(1-ix)}}}$

$\underline{\underline{x=0}}$ $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-a}^{a} \frac{dt}{1+t^2} + i\int_{-a}^{a}\frac{t\,dt}{1+t^2}\right)$

$= \frac{1}{2\pi}(\arctan a - \arctan(-a)) \to \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ när $a \to \infty$.

6. Låt $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$.

Enligt Cauchy-Riemanns ekvationer är $u_x = v_y$ och $u_y = -v_x$.

Eftersom $u(x,y) = -2xy + e^{-y}\cos x + 1$,

$u_x = -2y - e^{-y}\sin x = v_y$ Integration m.a. på y ger $v(x,y) = -y^2 + e^{-y}\sin x + g(x)$, där g är en funktion som beror på x.

$u_y = -v_x \Rightarrow -2x - e^{-y}\cos x = -(e^{-y}\cos x + g'(x))$

$g'(x) = 2x \Rightarrow g(x) = x^2 + C$

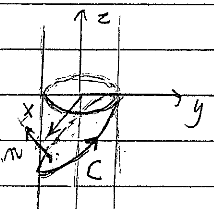
Vi får att $f(z) = -2xy + e^{-y}\cos x + 1 + i(-y^2 + e^{-y}\sin x + x^2 + C)$

Eftersom $f(0) = 2+i$, måste $2 + iC = 2 + i \Rightarrow C = 1$.

Svar: $\underline{f(z) = -2xy + e^{-y}\cos x + 1 + i(-y^2 + e^{-y}\sin x + x^2 + 1)}$

$\underline{= iz^2 + e^{iz} + 1 + i}$

7. $$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$



enligt Stoke's sats. S är den del av planet $z = y - 2$ som är innanför C.

Planets normal $n = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}$,

$dS = \sqrt{2}\, dxdy$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ -y^2 & x & z^3 \end{vmatrix} = (1+2y)k$$

$$\Rightarrow \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (1+2y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\,dxdy$$

där D är cirkelskivan $x^2+y^2 \le 1$ i xy-planet.

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (1+2y)\,dxdy = \text{arean av } D = \underline{\underline{\pi}}$$

eftersom $\iint_D y\,dxdy = 0$ p.g.a. symmetrin.