Matematik påbyggnadskurs 5B1304
Lösningar till tentamen den 23/8 2005

1. Den homogena ekvationen $x^2y'' + xy' + 9y = 0$ är en Euler-Cauchy ekvation. Insättning $y = x^r$ ger ekvationen $r^2 + 9 = 0$, $r = \pm 3i$. Vi får lösningarna $y = \cos(3\ln x)$ och $y = \sin(3\ln x)$ om $x > 0$.
En partikulärlösning kan sökas på formen $y = Cx^{-1}$. Vi får att $C = \frac{1}{5}$. Den allmänna lösningen är
$y = C_1\cos(3\ln x) + C_2\sin(3\ln x) + \frac{1}{5}x^{-1}$ för $x > 0$
Lösningen för $x \neq 0$ är $\underline{y = C_1\cos(3\ln|x|) + C_2(3\ln|x|) + \frac{1}{5}x^{-1}}$

---

2. a) Vi deriverar $y = \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. $y' = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = -\frac{1}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ och sätter in i ekvationen $xy'' + (1-x)y' = 0$.

$$-\frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 1 - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = 0.$$

Detta kan skrivas $-1 + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = 0$

Summeringen kan börjas med $n=1$, Låt $n = p+1$ i första summan $-1 + \sum_{p=0}^{\infty}(p+1)^2 a_{p+1} x^p - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = 0$.

Vidare är $a_1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)^2 a_{n+1} - n a_n\right)x^n = 0$

$\Rightarrow a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{n a_n}{(n+1)^2}$ $n = 1, 2, \ldots$, a_0 är godtyckligt tal

$a_2 = \frac{a_1}{4} = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{2a_2}{9} = \frac{1}{18}$, $a_4 = \frac{1}{96}$, ...

En lösning är $y = \ln x + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{96}x^4 + \cdots$
(där $a_0 = 0$) $y = 1$ är en annan linj. oberoende lösning.
Den allmänna lösningen är
$\underline{y = C_1 + C_2\left(\ln x + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{96}x^4 + \cdots\right)}$

2b) Låt $y' = v$. Ekvationen är nu $xv' = -(1-x)v$.
Variabelseparation ger ekvationen $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{x-1}{x}\,dx$.
Vi får $v = C_1 \frac{e^x}{x} = y'$

$$y = C_1 \int \frac{e^x}{x}\,dx + C_2$$

(Resultatet är samma som i a); vi kan skriva $\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{e^x - 1}{x}$

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{e^x - 1}{x}\,dx = \ln x + \int \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)dx)$$

3. Koefficienterna är

$$a_n = \frac{1}{N_n} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx \quad \text{där} \quad N_n = \int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} |x| P_n(x)\,dx \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \qquad a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x|x|\,dx = 0,$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} |x| \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,dx = \frac{5}{2} \int_0^1 x(3x^2-1)\,dx = \frac{5}{8}$$

$$a_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^{1} |x| P_3(x)\,dx = 0 \quad (P_3 \text{ är udda}) \quad \text{etc.}$$

$$|x| \sim \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{5}{8} P_2(x) + \cdots$$

4. Låt $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t}\,dt$ vara Fouriertransformen av y och $\hat{f}$ Fouriertransformen av f. Transformering av ekvationen ger $i\omega F(\omega) + a F(\omega) = \hat{f}(\omega)$,

$$F(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{a + i\omega} = \hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega) \quad \text{där} \quad \hat{g}(\omega) = \frac{1}{a + i\omega} \text{ är}$$

Fouriertransformen av $g(t) = e^{-at} u(t)$. Vi får

$$y(x) = (g * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(x-t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-at} f(x-t)\,dt$$

5. Låt $F(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}\, u(x,t)\, dt$. Eftersom $u(0,t) = 1$, är $F(0,s) = \frac{1}{s}$. Vidare är

$\mathcal{L}\{u_x(x,t)\} = F_x(x,s)$ och

$\mathcal{L}\{u_t(x,t)\} = sF(x,s) - u(x,0) = sF(x,s) - 1$.

Vi får ekvationen $F_x + 3x^2(sF - 1) = \frac{3x^2}{s}$.

En integrerande faktor är e^{sx^3}. Vi får

$\frac{d}{dx}\left(e^{sx^3} F\right) = 3x^2(1+s)e^{sx^3}$ och vidare

$e^{sx^3} F = (1+s)\int 3x^2 e^{sx^3}\,dx + C(s) = \left(1+\frac{1}{s}\right)\frac{1}{s}e^{sx^3} + C(s)$,

dvs. $F(x,s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + C(s)e^{-sx^3}$. Villkoret $F(0,s) = \frac{1}{s}$ ger $C(s) = -\frac{1}{s^2}$.

$\Rightarrow \quad \underline{u(x,t) = 1 + t - (t - x^3)\,\mathcal{U}(t - x^3)}$

---

6. Vi använder Stokes' sats $\oint_C F\cdot dr = \iint_S \nabla\times F\cdot n\, dS$ och väljer S = området innanför triangeln.

Triangeln är i planet $x+y+z=1$. Vektorn n är normal till planet, $n = -\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$.

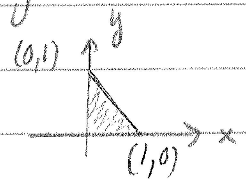
$$\nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ xy & y^2 & xz \end{vmatrix} = -zj - xk = (0,-z,-x)$$

$dS = \sqrt{3}\, dx\, dy$

$$\oint_C F\cdot dr = -\iint_S (0,-z,-x)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\, dS \qquad z = 1-x-y$$

$$= \iint_A (1-x-y+x)\, dx\,dy = \iint_A (1-y)\, dx\,dy$$

A = projektionen av S på xy-planet



$$\oint_C F\cdot dr = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-y)\,dy\right)dx = \int_0^1 \left[y - \tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx =$$

$$\int_0^1\left(1-x-\tfrac{1}{2}(1-x)^2\right)dx = \int_0^1\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x^2\right)dx = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}$$

7. Vi gör substitutionen $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$ i integralen $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-3\sin\theta}$

$$\left.\begin{aligned} z &= e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ z^{-1} &= e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \quad z - \frac{1}{z} = 2i\sin\theta$ Låt C vara enh. cirkeln pos. orienterad

$$I = \oint_C \frac{dz}{iz\left(5 - 3\,\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)} = \oint_C \frac{2dz}{z\left(10i - 3z + \frac{3}{z}\right)}$$

$$= \oint_C \frac{2dz}{-3z^2 + 10iz + 3} = -\frac{2}{3}\oint_C \frac{dz}{z^2 - \frac{10}{3}iz - 1}$$

$$= -\frac{2}{3}\oint_C \frac{dz}{(z-3i)(z-\frac{1}{3}i)}$$ Låt $h(z) = \frac{1}{(z-3i)(z-\frac{1}{3}i)}$

$z = 3i$ och $z = \frac{1}{3}i$ är enkla poler till h, $z = \frac{1}{3}i$ är innanför C. Enligt residysatsen är

$$I = -\frac{2}{3}\, 2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{i}{3}} h(z)$$

$$\operatorname{Res}_{\frac{i}{3}} h(z) = \lim_{z\to\frac{i}{3}} \left(z - \frac{i}{3}\right)h(z) = \lim_{z\to\frac{i}{3}} \frac{1}{z-3i} = \frac{3i}{8}$$

$$I = -\frac{4\pi i}{3}\cdot\frac{3i}{8} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$