Lösningar till tentamen den 19/5 2006, 5B1304

1. Vi söker lösning $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ där $a_0 \neq 0$.
Då är $y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}$ och $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$.
Insättning i ekvationen ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(n+r)(n+r-1) + 3a_n(n+r)\right) x^{n+r-1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+3} = 0$$

I den andra summan n byts mot $n-4$ $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r+2) x^{n+r-1} + \sum_{n=4}^{\infty} 4a_{n-4} x^{n+r-1} = 0.$$

Vi får vidare $a_0 r(r+2) x^{r-1} + a_1 (r+1)(r+3) x^r +$
$a_2 (r+2)(r+4) x^{r+1} + a_3 (r+3)(r+5) x^{r+2}$
$+ \sum_{n=4}^{\infty} \left(a_n (n+r)(n+r+2) + 4a_{n-4}\right) x^{n+r-1} = 0.$

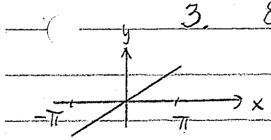
Vi får ekvationerna $a_0 r(r+2) = 0$,
$a_1(r+1)(r+3) = 0$, $a_2(r+2)(r+4) = 0$, $a_3(r+3)(r+5) = 0$ och
$a_n (n+r)(n+r-2) + 4a_{n-4} = 0$, $n \geq 4$.
Från första ekv. följer att $r = 0$ eller $r = -2$.
Antag att $r = -2$ $\Rightarrow a_1 = a_3 = 0$
$a_n (n-2) n + 4a_{n-4} = 0$ $\quad a_n = -\frac{4a_{n-4}}{n(n-2)}$ $\quad n \geq 4$.
Då är $a_4 = -\frac{a_0}{2}$, $a_6 = -\frac{a_2}{6}$, $a_{2k+1} = 0$ för alla k,
$a_8 = -\frac{a_4}{12} = \frac{a_0}{24}$; $a_{10} = -\frac{a_6}{20} = \frac{a_2}{5!}$, $a_{12} = -\frac{a_0}{6!}$,
$a_{14} = -\frac{a_2}{7!}$ etc.

$$y = x^{-2}\left(a_0 + a_2 x^2 - \frac{a_0}{2}x^4 - \frac{a_2}{6}x^6 + \cdots\right)$$

Genom att välja $a_0 = 1$, $a_2 = 0$ resp. $a_0 = 0$, $a_2 = 1$ får vi lösningarna
$y_1 = x^{-2}\left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4!}x^8 - \frac{1}{6!}x^{12} + \cdots\right) = x^{-2}\cos x^2$ och
$y_2 = x^{-2}\left(x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} - \cdots\right) = x^{-2}\sin x^2$
som är linjärt oberoende.

2. Insättning $y = x^r$ i den homogena ekvationen
$x^2 y'' + xy' + 4y = 0$ ger ekvationen $r(r-1) + r + 4 = 0$,
dvs. $r^2 + 4 = 0$. Rötterna är $\pm 2i$.
$x^{\pm 2i} = e^{\pm 2i \ln x}$. Vi får den allmänna lösningen
$y = C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln x)$.
Vi söker en partikulärlösning $y = A \ln x$.
Då är $y' = \frac{A}{x}$, $y'' = -\frac{A}{x^2}$, $-A + A + 4A\ln x = \ln x$,
$A = \frac{1}{4}$.
Den allmänna lösningen är
$$y = C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln x) + \frac{1}{4}\ln x$$

3. Enligt Beta är Fourierserien av $f(x) = x$
$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$ $\quad -\pi < x < \pi$.



Summan av Fourierserien $= x$ när $-\pi < x < \pi$.
För $x = \frac{\pi}{2}$ får vi $\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin n \cdot \frac{\pi}{2}$.
För jämna tal n är $\sin n\pi/2 = 0$. Låt $n = 2k+1$.
Eftersom $(-1)^{2k+2} = 1$ och $\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k$,
vi får $\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1}(-1)^k$ och vidare $\underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}}$.

I Fourierserien $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$
för $f(x) = x$ är $a_n = 0$ för alla n och $b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$.
Enligt Parseval's ekvation:
$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$. Vi får

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4. a) Vi sätter $u(x,t) = X(x)T(t)$ i ekvationen $u_t = u_{xx} - 2u_x + u$ och får

$XT' = X''T - 2X'T + XT$. Vidare är

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) - 2X'(x) + X(x)}{X(x)} = -\lambda.$$ Vi får ekvationerna

$T' + \lambda T = 0$ och $\underline{X'' - 2X' + (1+\lambda)X = 0}$.

Randvillkoren $u(0,T) = X(0)T(t) = 0$ och $u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0$ för $t > 0$ medför att $\underline{X(0) = X(\pi) = 0}$.

Den karakteristiska ekvationen till egenv. problemet är $r^2 - r + 1 + \lambda = 0$ dvs. $(r-1)^2 = -\lambda$

1) $r = 1 \pm \sqrt{-\lambda}$ om $\lambda < 0$. Då är $X(x) = C_1 e^{(1+\sqrt{\lambda})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{\lambda})x}$

2) $r = 1 \pm \sqrt{\lambda}\, i$ om $\lambda > 0$. Då är $X(x) = e^x(C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x)$

3) $r = 1$ om $\lambda = 0$. Då är $X(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Randvillkoren $X(0) = X(\pi) = 0$ ger i fallen 1) och 3) endast lösningen $X = 0$.

Antag att $\lambda > 0$. Då är $X(0) = C_1 = 0$ och $X(\pi) = e^{\pi} C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi$ och vidare $\lambda = n^2$ $n = 1, 2, \ldots$.

Egenvärden är $\underline{\lambda = n^2}$ och $\underline{\text{egenfunktionerna}}$

$$\underline{\underline{X_n(x) = A_n e^x \sin nx}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

b) Ett Sturm-Liouvilleproblem kan skrivas

$-(p(x)X')' + q(x)X = \lambda w(x)X(x)$, dvs

(1) $-p(x)X'' - p'(x)X' + q(x)X = \lambda w(x)X(x)$ (enl. Beta)

Om vi dividerar (1) med $-p(x)$ och jämför med ekv. $X'' - 2X' + X = -\lambda X$ vi får v.g.v →

4 (forts.)

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = -2, \quad \frac{q(x)}{-p(x)} = 1, \quad \frac{w(x)}{-p(x)} = -1.$$

Då är $\int \frac{dp(x)}{p(x)} = -2x + C_1$, $p(x) = Ce^{-2x}$

$p(x) > 0$. Vi kan välja $C = 1 \Rightarrow$

$p(x) = e^{-2x}$, $q(x) = -e^{-2x}$ och $\underline{\underline{\text{viktfuntionen}}}$

$$\underline{\underline{w(x) = e^{-2x}}}.$$

5. Ekvationen kan skrivas $f * f(x) = e^{-x^2}$ för alla x. Genom att Fouriertransformera ekvationen får vi

$\hat{f}(\omega)\hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}\omega^2}$. Då är $\hat{f}(\omega) = \pm \pi^{1/4} e^{-\frac{1}{8}\omega^2}$.

Eftersom $\mathcal{F}\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, e^{-2x^2}\} = e^{-\frac{1}{8}\omega^2}$, är $f(x) = \pm \pi^{1/4}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, e^{-2x^2}$.

Svar: $\underline{\underline{f(x) = \sqrt{2}\,\pi^{-\frac{1}{4}} e^{-2x^2}}}$

6. Låt $f(z) = \frac{1}{(z^2+5)(z^2+1)}$. Eftersom nämnarens grad är $\geq$ täljarens grad $+2$ gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$ där residuerna räknas i de poler som ligger i övre halvplanet.

f har fyra enkla poler: $z = \pm\sqrt{5}i$ och $z = \pm i$.

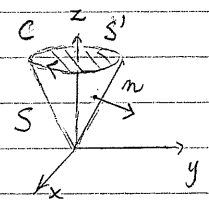
$$\operatorname{Res}_i f(z) = \lim_{z \to i}(z-i)f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z^2+5)(z+i)} = \frac{1}{4 \cdot 2i} = -\frac{i}{8},$$

$$\operatorname{Res}_{\sqrt{5}i} f(z) = \lim_{z \to \sqrt{5}i} \frac{1}{(z+\sqrt{5}i)(z^2+1)} = \frac{1}{2\sqrt{5}i(-4)} = \frac{i}{8\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{40}i$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left(-\frac{1}{8}i + \frac{\sqrt{5}}{40}i\right) = -2\pi\left(-\frac{5}{40} + \frac{\sqrt{5}}{40}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi(5-\sqrt{5})}{40}}}$$

7. För ytan $z = \sqrt{x^2+y^2} = g(x,y)$



är $D_1 g(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D_2 g(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$dS = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy$

och $n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$.

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ y & -x & z^2 \end{vmatrix} = -2k$$

Vi får $\iint_S \nabla \times F \cdot n\, dS = \iint_A -2(0,0,1)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dxdy$

där A är projektionen av S på xy-planet $= 2 \iint_{x^2+y^2\le 4} dxdy = 2\cdot\pi\cdot 4 = \underline{\underline{8\pi}}$

<u>Altern.</u> Enligt Stoke's sats $\iint_S \nabla\times F\cdot n\, dS = \int_C F\cdot dr$

$= \iint_{S'} \nabla \times F \cdot n\, dS$ där S' är ytan $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ z = 2 \end{cases}$

Dess normal är $n = -k$

Integralen $= \iint_{S'} (-2k)\cdot(-k)\, dS = 2\cdot$ arean av $S' = \underline{\underline{8\pi}}$