Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Matematik påbyggnadskurs 5B1304

Fredagen den 25 augusti 2006, kl 8.00-13.00

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 11, 15 och 19 poäng.
Tillåtet hjälpmedel är “Beta, Mathematics handbook”.

....

1. Bestäm den allmänna lösningen till Euler-Cauchy-ekvationen

$$x^2y'' + 3xy' - 3y = x^3 \qquad x > 0. \qquad \text{(3p)}$$

2. Sök två linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen

$$3xy'' + (2 - x)y' - y = 0, \qquad x > 0.$$

För lösningar i serieform ange minst tre termer (som $\neq 0$.)
(Ledning: Sök lösningar $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.) (3p)

3. a) Bestäm egenvärden och egenfunktioner för Sturm-Liouville-problemet

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(\pi) = 0. \qquad (*)$$

b) Utveckla funktionen $f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq \pi$ i en serie m.a. på egenfunktionerna ϕ_n, $n = 1, 2, ...$ till (*), dvs. bestäm koefficienterna $c_n, n = 1, 2, ...$ i serien

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x). \qquad \text{(3p)}$$

v.g. vänd

4. Bestäm, genom att använda Laplace-transform, temperaturen $u(x,t)$ i en stav, $0 \leq x < \infty$, $t \geq 0$, när följande villkor gäller:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = 2, & t > 0. \end{cases}$$

Vidare antas att $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$ för varje $t > 0$.

(Ledning: Visa att värmeledningsekvationen transformerad (m.a. på t) blir

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x,s) = sF(x,s),$$

där $F(x,s) = L\{u(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\, dt$. Man kan anta att integraltecknet och gränsvärdet kan bytas så att

$$\lim_{x\to\infty} F(x,s) = \int_0^\infty \lim_{x\to\infty} e^{-st} u(x,t) dt = 0 \quad \text{för varje } s.) \qquad (3p)$$

5. Bestäm en komplexvärd funktion $f = f(x)$, $-\infty < x < +\infty$ så att

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(t) e^{-itx}\, dt = \begin{cases} e^{-x}, & \text{om } x > 0 \\ 0, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Vilket värde har integralen för $x = 0$? (4p)

6. En funktion $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ är analytisk i hela komplexa planet. Realdelen $\mathrm{Re} f(z) = -2xy + e^{-y}\cos x + 1$ (där $z = x + iy$) och $f(0) = 2 + i$. Bestäm f. (3p)

7. Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y^2, x, z^3)$. Beräkna integralen $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ där C är skärningskurvan mellan planet $z = y - 2$ och cylindern $x^2 + y^2 = 1$. Kurvan C genomlöpes moturs sedd från den positiva $z-$ axeln. (3p)