Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Matematik påbyggnadskurs 5B1304

Onsdagen den 10 januari 2007, kl 14.00-19.00

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 11, 15 och 19 poäng.
Tillåtet hjälpmedel är "Beta, Mathematics handbook".

. . . .

1. Sök den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x^2y'' - xy' + 2y = 4 - 9x \qquad x > 0.$$

(3p)

2. Sök två linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen

$$6x^2y'' + 5xy' + (x^2 - 1)y = 0, \qquad x > 0$$

För lösningar i serieform ange minst tre termer (som $\neq 0$.)
(Ledning: Sök lösningar $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.) (3p)

3. Hitta en analytisk funktion f, uttryckt som en funktion av z, sådan att realdelen av $f(z)$ är $u(x, y) = e^x \cos y + x - y$ (z = x+iy). (3p)

4. Bestäm en funktion f som uppfyller ekvationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-|t|}\,dt = 3e^{-|x|} - e^{-3|x|}, \; x \in \mathbb{R}.$$

(3p)

5. Använd Laplacetransformen för att lösa randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, & u(\pi,t) = 0 \qquad t > 0 \\ u(x,0) = 2\sin x, & u_t(x,0) = -2\sin x \qquad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(Ledning: Laplacetransformen av u med avseende på t är $L\{u(x,t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}u(x,t)dt$. Man kan anta att formeln $L\{v_t(x,t)\} = sL\{v(x,t)\} - v(x,0)$ gäller för $v = u$ och för $v = u_t$ och att $L\{u_{xx}(x,t)\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}L\{u(x,t)\}$.) (4p)

v.g. vänd

6. Beräkna integralen

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^2 - 2iz}\, dz$$

där C är cirkeln $|z| = 5$ genomlöpt en gång i positiv riktning. Svaret skall uttryckas på formen $a + bi$. (3p)

7. Beräkna flödesintegralen $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot n\, dS$ uppåt genom ytan S, där S är den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ där $z \geq 1$ och $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2yz, yz^2, z^3)$. n är en enhetsnormal till ytan.
(Ledning: Använd Stoke's sats.) (3p)