

5B1305 Tillämpad kombinatorik, VT 2007 Exempeltentamen

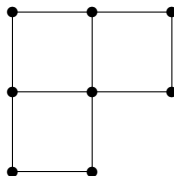
Inga hjälpmedel är tillåtna. Inklusive bonus kan man få 29 poäng. 12 poäng ger minst betyget 3. 17 poäng ger minst betyget 4. 22 poäng ger betyget 5.

1. (2p) Finn den permutation i S_9 som avbildas på nedanstående tablåpar under RSK-korrespondensen

1	4	7	9
2	5	8	
3			
6			

1	2	5	7
3	4	6	
8			
9			

2. (2p) Bestäm det kromatiska polynomet för grafen nedan.



3. (2p) Definiera en talföljd $a_0, a_1, \dots$ genom $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ och $a_n = 2a_{n-2} + a_{n-3}$ om $n \geq 3$. Uttryck $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ som en rationell funktion.

4. (2p) Finn en generatormatris för den linjära binära kod vars checkmatris H är given nedan.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. (4p) Låt $G = (V, E)$ vara en riktad graf. Antag att $s, t \in V$ är två hörn sådana att varje par av riktade stigar från s till t har minst en gemensam kant. Visa att det finns en kant som ingår i varje riktad stig från s till t .

6. (4p) För varje positivt heltal n , konstruera en linjär binär kod med minimiavstånd två och maximal rang.

7. (4p) Hotellnycklar tillverkas av plastkvadrater som är uppdelade i ett regelbundet $n \times n$ rutmönster. I dessa rutor ska slås tre hål, två runda och ett triangulärt. Visa att antalet möjliga nycklar är

$$\begin{cases} n(n-1)(n^4 + n^3 - 2n^2 + 2n - 4)/16 & \text{om } n \text{ är jämnt,} \\ (n-1)(n^5 + n^4 - 2n^3 + 6n^2 - 7n + 1)/16 & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

8. (4p) Fixera positiva heltal k , m och n . Låt $p_{m,n}(k)$ beteckna antalet partitioner av k där varje del har storlek högst n och som innehåller högst m delar. Visa att

$$\sum_{k=0}^{mn} p_{m,n}(k) = \binom{m+n}{m}.$$

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Genom att applicera inversen till RSK-algoritmen (se boken) får man fram permutationen 362587941.

2. För att förenkla notationen låter vi nedan en graf beteckna sitt kromatiska polynom. Rekursionen för kromatiska polynom (borttagning-kontraktion) ger identiteterna

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \diagup \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \diagup \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \diagdown \\ \hline \end{array}$$

så att

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \diagdown \\ \hline \end{array}.$$

Vi kan fortsätta ta bort och kontrahera kanter ett tag till tills bitarna blir tillräckligt enkla, eller så resonerar vi som följer.

Om vi bara kände till det kromatiska polynomet för en 4-cykel, kalla det för $P(x)$, skulle vi kunna finna polynomen för samtliga grafer i HL ovan. Från vänster till höger är de fyra polynomen nämligen

- (1) $(x-1) \cdot (\text{polynom nummer 2})$, ty efter att graf nummer två färgats med x färger återstår att färga det extra hörnet uppe till vänster på något av $x-1$ sätt.
- (2) $P(x)^2/x$, ty av symmetriskäl har en 4-cykel precis $P(x)/x$ färgningar om ett bestämt hörn måste ha en bestämd färg. Vi kan därför färga den "nordöstra" 4-cykeln på $P(x)$ sätt och därefter den "sydvästra" med ett hörns färg redan givet på $P(x)/x$ sätt.
- (3) $P(x)(x-1)^2$: färga först 4-cykeln ($P(x)$ sätt), därefter de återstående hörnen ($x-1$ val vardera).
- (4) $P(x)(x-2)$: färga först 4-cykeln ($P(x)$ sätt), därefter det sista hörnet ($x-2$ möjligheter).

Polynomet vi söker är alltså

$$\begin{aligned} f_G(x) &= (x-1)P(x)^2/x - P(x)^2/x + P(x)(x-1)^2 - P(x)(x-2) = \\ &= P(x)^2(x-2)/x + P(x)(x^2 - 3x + 3). \end{aligned}$$

Borttagning-restriktion i 4-cykeln ger

$$P(x) = x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2) = x(x-1)(x^2 - 3x + 3),$$

så

$$\begin{aligned} f_G(x) &= x(x-1)^2(x-2)(x^2-3x+3)^2 + x(x-1)(x^2-3x+3)^2 = \\ &= x(x-1)(x^2-3x+3)^3. \end{aligned}$$

3. Man får

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + x + x^2 + \sum_{n \geq 3} (2a_{n-2} + a_{n-3})x^n = \\ &= 1 + x + x^2 + 2x^2(F(x) - 1) + x^3F(x) = \\ &= 1 + x - x^2 + (2x^2 + x^3)F(x), \end{aligned}$$

$$\text{så } F(x) = \frac{1+x-x^2}{1-2x^2-x^3}.$$

4. Gauss-Jordanelimination av H ger matrisen

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom elementära radoperationer inte påverkar nollrummet kommer H' också att vara en checkmatris för koden som vi döper till C . För att få en checkmatris på trevlig form betraktar vi koden D som fås från C genom att byta plats på tredje och fjärde koordinaten. Koden D har alltså checkmatris

$$H_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\text{Id } A).$$

En generatormatris G_D till D ska ha egenskapen $H_D G_D^T = 0$, vilket är uppfyllt om

$$G_D = (-A^T \text{ Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En generatormatris för C fås nu genom att byta tillbaka koordinat 3 och 4:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Antagandet om G betyder att det maximala antalet parvis (kant-)disjunkta riktade stigar från s till t antingen är 0 eller 1. Om det är noll duger vilken kant som helst, för det finns ingen stig från s till t . Om det är 1, säger Mengers sats att det finns en s, t -separerande kantmängd av storlek 1, d.v.s. en kant som ingår i alla stigar från s till t . $\square$

6. Singleton (eller sunt förnuft) säger att vi inte kan hoppas på fler än 2^{n-1} kodord, d.v.s. koden kan högst ta upp halva Hammingrummet.

Låt C vara mängden av kodord med jämnt antal ettor. Notera att $c_1 + c_2 \in C$ om $c_1, c_2 \in C$. Multiplikation med skalärer i $\mathbb{Z}_2$ bevarar trivialt C (det räcker att kolla att noll-ordet ligger i C). Alltså är C linjär. Att minimiavståndet är två är uppenbart. Delmängderna till $[n]$ med udda kardinalitet är lika många som de med jämn, så $|C| = 2^{n-1}$. Saken är klar.

7. Symmetrigruppen för en kvadrat (d.v.s. den dihedrala gruppen med åtta element) verkar på mängden av n^2 åtskiljbara rutor med slagna hål. Vi söker antalet banor. För att kunna applicera Burnsides lemma, vill vi veta hur många konfigurationer som fixeras av vart och ett av gruppelmenten. Notera att fixpunkter till ett element g finns om och endast om g 's cykelindelning av de n^2 rutorna har en minst en 1-cykel och minst en 2-cykel alternativt minst tre 1-cykler. En konfiguration är nämligen fixerad om och endast om det triangulära hålet är fixerat och de två cirkulära antingen skickas till varandra eller båda är fixerade.

- Identiteten fixerar alla konfigurationer. Vi kan välja de runda hålen på $n^2(n^2 - 1)/2$ sätt och sedan det triangulära på $n^2 - 2$ sätt, så identiteten har $n^2(n^2 - 1)(n^2 - 2)/2$ fixpunkter.
- Rotation 90° kan inte fixera några konfigurationer eftersom alla rutor (om n är jämnt) respektive alla utom en (om n är udda) delas upp i 4-cykler.
- Rotation 180° delar upp alla rutor i 2-cykler om n är jämnt. Om n är udda delas alla rutor utom den fixerade mittrutan upp i 2-cykler. I det förra fallet kan inga fixpunkter finnas. I det senare kan det triangulära hålet sättas i mitten. Sedan väljs en 2-cykel bland de $(n^2 - 1)/2$ tillgängliga ut för att härbärgera de cirkulära hålen. Totalt finns alltså $(n^2 - 1)/2$ fixerade konfigurationer om n är udda.
- Reflektion i en symmetriaxel som passerar genom två av kvadratens kanter delar upp rutorna i 2-cykler om n är jämnt, så då fixeras ingenting. Om n är udda kan det triangulära hålet sättas i någon av de n centrala, fixerade rutorna. Därefter väljs antingen en av de $(n^2 - n)/2$ 2-cyklerna eller två av de $n - 1$ återstående 1-cyklerna ut till de cirkulära hålen. Totalt kan vi alltså konstruera fixa konfigurationer på $n((n^2 - n)/2 + (n - 1)(n - 2)/2)$ sätt.

- Reflektion i en symmetriaxel som passerar genom två av kvadratens hörn delar upp rutorna i n 1-cykler och $(n^2 - n)/2$ 2-cykler. Med samma resonemang som i det förra fallet, n udda, ser vi att det finns $n((n^2 - n)/2 + (n - 1)(n - 2)/2)$ fixa konfigurationer (oavsett paritet på n).

Nu applicerar vi Burnside. Kom ihåg att de två reflektionsfallen ovan bidrar med två gruppelament vardera. Om n är jämnt fås antalet banor som

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)| = \frac{1}{8} \left(\frac{n^2(n^2 - 1)(n^2 - 2)}{2} + 2 \frac{n((n^2 - n) + (n - 1)(n - 2))}{2} \right)$$

vilket blir det sökta uttrycket efter lite förenklingar.

När n är udda får vi

$$\frac{1}{8} \left(\frac{n^2(n^2 - 1)(n^2 - 2)}{2} + \frac{n^2 - 1}{2} + 4 \frac{n((n^2 - n) + (n - 1)(n - 2))}{2} \right)$$

banor. Åter får vi vårt sökta uttryck efter lite omstuvningar. $\square$

8. Restriktionerna innebär att $p_{m,n}(k)$ är antalet partitioner av k vars Ferrersdiagram får plats i en $m \times n$ -rektangel. Alltså räknar VL alla Ferrersdiagram som får plats i sagda rektangel. Vi har en bijektion från mängden av sådana diagram till antalet stigar från nedre vänstra hörnet i rektangeln till det övre högra hörnet där stegen är av typen $(0, 1)$ (upp) eller $(1, 0)$ (höger) genom att följa konturen av diagrammet (se exempel nedan). Alltså är VL lika med antalet sådana stigar. En stig konstrueras genom att välja vilka m av $m + n$ steg som ska gå upp, så $HL = VL$. $\square$

