Institutionen för matematik
KTH
Harald Lang

Tentamensskrivning, 2003-01-08, kl 8.00–1300.
5B1306 Inledande Finansiell Matematik.
Hjälpmedel: miniräknare

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering. Observera att redundant information kan förekomma i uppgifterna.

1. Vi har tre tillgångar A, B och C. Vi betraktar ett utfallsrum med bara tre händelser som kan inträffa vid en senare tidpunkt T: $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}$. Tillgångarnas värden vid respektive utfall är enligt tabellen:

	ω_1	ω_2	ω_3
A:	50	70	90
B:	100	100	200
C:	150	50	350

Terminspriserna, observera: *terminspriserna*, på de tre tillgångarna med leveransdatum T är 67, 120 och 145 respektive för tillgång A, B och C. Avgör om det finns något arbitrage på denna marknad, antingen genom att ange ett exempel på sådant, eller genom att bevisa att inget arbitrage existerar. Räntan fram till tidpunkten T antar vi är 10%.

2. Antag att man vill prissätta ett kontrakt där ett underliggande värde väntas variera i pris på ett visst sätt. Säg t.ex. att underliggande värdet är råolja. Priset kan t.ex. förväntas stiga till en början av politiska eller andra skäl – krig, kartellbildningar, utvinningsproblem eller dylikt – för att sedan förväntas sjunka.

I sådana fall kan det vara olämpligt att använda ett binomialträd över framtida spotpriser enligt Cox-Ross-Rubenstein; man vill kanske att de förväntade prisförändringarna skall tas hänsyn till i binomialträdet. Ett sätt att göra det är så här:

0	1	2	3
S_0	$S_1 e^{\sigma}$	$S_2 e^{2\sigma}$	$\cdots$
	$S_1 e^{-\sigma}$	S_2	$\cdots$
		$S_2 e^{-2\sigma}$	$\cdots$

Här är S_t terminspriset idag ("forward price") på underliggande tillgången för inlösen i respektive tidsperiod.

Frågan är nu vad de riskjusterade sannolikheterna q för "upp" (ett snäpp åt höger på samma rad) respektive $1 - q$ för "ner" (ett snäpp åt höger och en rad nedåt) skall sättas till. Bestäm alltså det korrekta värdet på q i detta binomialträd. Vi antar en konstant ränta r per period. *Observera:* det är inte klart att man kan använda samma q i alla tidsperioder, dvs. samma från kolumn 0 till 1 som från kolumn 1 till 2 osv. Kontrollera att man kan använda samma q åtminstone i dessa två steg.

Forts...

3. Antag att niomånadersräntan är 10% per år, sexmånadersräntan 9% per år och tremånadersräntan 8.5% per år, alla med kontinuerlig förräntning.

   a. Ge ett approximativt värde på futurespriset på en tremånaders statsskuldsväxel (nollkupong) med inlösenvärde 100 000 kr att levereras om sex månader.

   b. Varför är ditt värde inte exakt?

   c. Är det riktiga värdet på futurespriset större eller mindre än det du angav i a? Motivera med ett ordentligt matematiskt bevis.

4. Antag att futurespriset för kakao för leverans om ett år är 16.00 kr/kilo. Futuresprisets volatilitet är 20% per $\sqrt{\text{år}}$. Använd en bra modell för att beräkna priset på en Europeisk option att köpa 1 000 kilo kakao för 15 500 kronor med leverans om ett år. Vi antar en konstant ränta på 5% per år (med kontinuerlig förräntning).

5. Beräkna durationen för en portfölj som innehåller en kupongobligation med inlösenvärdet 100 000 kronor med 6% kupong (vilket innebär kuponginlösen varje halvår med 3% av inlösenvärdet) med mognadstid om två år, samt en lång position av ett futureskontrakt med inlösen om två år på en treårig (vid tiden för inlösen av futuren) 6% kupongobligation (första kuponginlösen ett halvår efter mognaden av futuren) med inlösenvärde 50 000 kronor. Räntan är idag 5.5% per år med kontinuerlig förräntning för alla löptider.

Formel: om $X = ae^{\sigma z}$ där $z \in N(0,1)$ och a, σ, K är konstanter, så gäller

$$\mathrm{E}[\max(X-K,0)] = \mathrm{E}[X]\Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \quad \text{där}$$
$$d_1 = \frac{\ln(\mathrm{E}[X]/K) + \sigma^2/2}{\sigma}, \quad d_2 = d_1 - \sigma$$

Här är Φ standard normalfördelningen; se bifogad tabell.