KTH Matematik
Harald Lang

Tentamensskrivning, 27/5 2003, kl 14.00–19.00.
5B1306 Inledande Finansiell Matematik
Hjälpmedel: miniräknare

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering. Observera att redundant information kan förekomma i uppgifterna.

1. a) Betrakta ett kontrakt som idag kostar P kronor och som ger innehavaren det stokastiska beloppet X vid ett senare tidpunkt T.

   Visa att $P = Z_T G_0$, där Z_T är priset på en nollkupong med inlösenvärde 1 vid tiden T och G_0 är forwardpriset på ett kontrakt som ger X vid tiden T. Argumentet skall bygga på principen om icke-arbitrage.

   b) I Hulls bok förekommer följande formel:

$$G_0 = (S_0 - I)e^{rT} \tag{1}$$

   Här är S_0 spotpriset på en tillgång som ger känd utdelning fram till tiden T. I är nuvärdet av denna utdelning, G_0 är forwardpriset på tillgången med leveranstiden T, r är T-åriga nollkupongräntan.

   Bevisa formeln (1). Argumentet skall bygga på principen om icke-arbitrage [men resultaten i a) får naturligtvis användas.]

   c) Beräkna terminspriset (forwardpriset) G_0 för en utländsk valuta med leverans om T år, uttryckt i dagens växelkurs X_0 och inhemska och utländska T-åriga nollkupongsräntorna r respektive r_f. *Observera att växelkursen vid tiden T är okänd idag.* Du skall bevisa formeln utgående från principen om icke-arbitrage [men resultatet i a) och b) får naturligtvis användas.] (10p.)

2. Det är nu 15:e juli. Handlare A har en lång position på ett futureskontrakt på 1000 kilo apelsiner med leverans 15:e januari, handlare B har motsvarande position i ett forwardkontrakt. Apelsinpriset betraktas som oberoende av räntor, så forwardpris = futurespris. Det rådande futurespriset är 12 kronor per kilo.

   Mot slutet av dagen meddelas att futurespriset stigit till 12.50 kronor per kilo. Bestäm värdeökningen av handlare A:s och handlare B:s portföljer på grund av denna prisförändring. Sexmånadersräntan är 10% per år. (4p.)

Forts . . .

3. Du skall beräkna priset på en Europeisk option på en tvåårig (vid tiden för inlösen av optionen) obligation. Optionens inlösentid är om tre år, och efter denna tidpunkt ger obligationen en kupongutdelning efter ett år (alltså fyra år från idag) på 100 kronor, och efter två år inlöses obligationen till 1 100 kronor (totalt, inklusive kupong).

   Du skall använda Blacks modell, men det räcker att du bestämmer följande parametrar (sedan är det ju bara att skyffla in siffrorna i en känd formel): $\underline{G_0 =}$ forwardpriset på obligationen med inlösen om tre år, och $\underline{\sigma =}$ obligationens volatililitet.

   Vi antar att yieldens standardavvikelse är 0.015 på ett år, nuvarande nollkupongräntor ges av $Z_1 = 0.975$, $Z_2 = 0.95$, $Z_3 = 0.90$, $Z_4 = 0.85$, $Z_5 = 0.80$ [$Z_i =$ priset på en i-årig nollkupong.]

   Tips 1: När du beräknar forward-yielden y kan du sätta $e^{-y} = x$ och få en andragradsekvation i x som du kan lösa.

   Tips 2: Om du anser att du behöver veta obligationens kupongutdelningar före år tre (inlösen av optionen) kan du sätta nuvärdet av dessa till I. Det skall försvinna ur räkningarna senare. (12p.)

4. Du skall beräkna priset på en exotisk option på en aktie. Inlösentiden är om ett år, och du vill använda ett binomialträd med tidssteget en månad.

   Du skall inte lösa hela problemet, men <u>ställa upp binomialträdet för aktiens spotpris</u> fram till och med två månader (alltså $t = 0$ =nu, en månad och två månader.) Du skall också ange <u>riskjusterade sannolikheterna</u> (under forward-måttet) för ”upp” respektive ”ner” i trädet.

   Det kan vara lämpligt att först ställa upp trädet för aktiens futurespriser, med inlösen om ett år, fram t.o.m. två månader.

   Den underliggande aktien kostar idag 200 kronor och den ger utdelning 5 kronor om $1\frac{1}{2}$ månad, men inga ytterligare utdelningar före optionens inlösen. Aktiens (eller snarare: futurespris ets) volatilitet antas vara 30% på ett år, och den fixa räntan 12% per år (med kontinuerlig förräntning.) (12p.)

5. Nedanstående är ett binomialträd över en-månadersräntan (per *månad*) enligt Ho-Lees modell (tidssteg en månad):

0.010	0.012	0.014	0.016
	0.008	0.010	0.012
		0.006	0.008
			0.004

   Beräkna
   a) Priset på en 2-månaders nollkupong (med inlösenpris 1.)
   b) Priset på en 4-månaders nollkupong.
   c) Forward-priset på en (idag) fyra-månaders nollkupong med leverans om två månader.
   d) Futures-priset på en (idag) fyra-månaders nollkupong med leverans om två månader.

   Räkna med sju decimaler och svara med sex. (12p.)

Tentamensskrivning, 27/5 2003, kl 14.00–19.00.
5B1306 Inledande Finansiell Matematik
Svar

1a. Om man köper det givna kontraktet, går kort ett forwardkontrakt och kortar G_0 stycken nollkupongare, så får man noll kronor i utdelning totalt. Alltså, om det inte skall finnas arbitrage, måste priset för denna portfölj vara noll. Detta ger $P - G_0 Z_T = 0$ som ger $P = G_0 Z_T$.

1b. Om vi köper kontraktet för S_0 får vi dels utdelningar vars nuvärde är I, dels en stokastisk betalning vars nuvärde enligt 1a) är $G_0 Z_T = G_0 e^{-rT}$. Alltså, enligt "lagen om ett pris" (som är ett specialfall av "icke arbitrage"), $S_0 = I + G_0 e^{-rT}$ som ger (1).

1c. Om vi köper en enhet utländsk valuta idag kostar det X_0 i inhemsk valuta. Nu köper vi utländska nollkupongare med inlösen vid tiden T för denna utländska valuta. Vi har då $e^{r_f T}$ enheter utländsk valuta vid tiden T. Vi växlar in denna till inhemsk valuta och har då $X e^{r_f T}$ i inhemsk vakuta, där X är växelkursen vid tiden T

Om vi nu kallar forwardpriset för X för G_0 har vi enligt 1a) att $X_0 = G_0 e^{r_f T} Z_T = G_0 e^{r_f T - rT}$ som ger $G_0 = X_0 e^{(r-r_f)T}$.

2. Handlare A får i stort sett omedelbart "marking to market", dvs. $1000 \cdot (12.50 - 12.00)$ kr $= 500$ kr i värdeökning.

Handlare B sitter med ett kontrakt som ger $1000 \cdot (X - 12.00)$ kr om sex månader, där X är spotpriset på apelsiner då (om sex månader.) Vi vet inte vad X kommer att vara, men forwardpriset på X är $G_0 =$ futurespriset $= 12.50$ kr. Enligt 1a) är värdet av B:s kontrakt därför $P = 1000 \cdot (G_0 - 12.00) Z_T$ kr $= 1000 \cdot (12.50 - 12.00) e^{-0.05}$ kr $= 475.61$ kr.

3. Först beräknar vi treåriga forwardpriset G_0 på den underliggande obligationen. Vi tänker oss därvid i andanom att vi inte gör någonting alls idag, utom att planera att köpa obligationen om tre år, för att behålla den till den löses in. Priset vi får betala för obligationen om tre år är stokastiskt $= X$, men forwardpriset är G_0. Penningflödet är alltså att vi betalar ut X om tre år, får 100 kr om fyra år och 1100 kronor om 5 år. Totala kostnaden idag är ju noll, så enligt 1a) har vi $0 = -G_0 Z_3 + 100 Z_4 + 1100 Z_5$. Detta ger $G_0 = 100 Z_4 / Z_3 + 1100 Z_5 / Z_3 = 1\,072\frac{2}{9}$.

Nu beräknar vi forward-yielden y. Om vi sätter $e^{-y} = x$ har vi att $G_0 = 100x + 1100x^2$. Löser vi denna andragradsekvation får vi $x = \frac{\sqrt{4255}}{66} - \frac{1}{22}$ (den andra roten är negativ.)

Vi beräknar nu $G_0 D_F = 1 \cdot 100x + 2 \cdot 1100x^2 \approx 2\,050.15$ och alltså durationen vid inlösen av optionen $= D_F \approx \frac{2\,050.15}{1072.22} \approx 1.912$ år. Detta ger att obligationens volatilitet som skall in i Blacks modell är $\underline{\sigma = 0.015 \cdot 1.912 = 0.02868}$. Och vi hade tidigare $\underline{G_0 = 1\,072\frac{2}{9}}$.

4. Vi beräknar först futurespriset F_0 som är det samma som forwardpriset. Om vi köper aktien idag kostar det 200 kr, och vi får 5 kr om 1.5 månader och S_{12} kr när vi säljer den om ett år. S_{12} är okänd idag, men dess forwardpris är F_0. Enligt 1a) gäller alltså att $200 = 5e^{-0.015} + F_0 e^{-0.12}$ som ger $F_0 = 219.946$ Vi har att $\sigma\sqrt{\Delta t} = 0.3/\sqrt{12} = 0.08660$. Trädet för futurespriser blir

219.946	239.843	261.540
	201.699	219.946
		184.967

Nu kan vi ställa upp trädet för aktiens spotpriser. Vi vet att $S_0 = 200$. Vi beräknar S_1 enligt samma princip som när vi beräknade F_0, dvs. $S_1 = 5e^{-0.005} + F_1 e^{-0.11}$ som med de två värdena på F_1 ger 219.834 respektive 185.664

Efter två månader finns inga utdelningar, så för S_2 blir relationen $S_2 = F_2 e^{-0.10}$ vilket ger sista kolumnen i trädet för spotpriserna:

200.000	219.834	236.651
	185.664	199.015
		167.365

Forward-sannolikheten för "upp" är $\frac{1}{1+e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}} = 0.478363$ och för "ner" $\frac{1}{1+e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = 0.521637$.

5a. Vi sätter obligationens pris till 1 om två månader, och diskonterar till idag på vanligt sätt. Det ger $Z_2 = 0.980201$.

5b. Vi sätter obligationens pris till 1 om fyra månader, och diskonterar till idag på vanligt sätt. Det ger $Z_4 = 0.960816$.

5c. Forwardpriset $= Z_4/Z_2 = 0.980224$. (Skall motiveras!)

5d. För att beräkna futurespriset tar vi trädet vi använde i 5b) men diskonterar inte i kolumnerna 1 månad och noll månader. Detta eftersom futurespriserna är en martingal under futuresmåttet, så futurespriset en månad är (betingade) väntevärdet av futurespriset nästa månad. Vi hamnar då på futurespriset $= 0,980216$. Och vi ser att futurespriset är något lägre än forwardpriset, som det skall vara.