KTH Matematik
Harald Lang

Tentamensskrivning, 27/5-2004, kl 14.00–19.00.
5B1306 Finansiell Matematik gk.
Hjälpmedel: miniräknare

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering. Observera att redundant information kan förekomma i uppgifterna. Formler som finns i den del av kurslitteraturen (bok, kompendium och "supplement") som ingår i kursen får naturligtvis användas utan bevis, med lämplig hänvisning, om inte annat sägs i uppgiften.

Några användbara formler:

- Om $X = ae^{sz}$ där $z \in N(0,1)$ och a, s och K är konstanter, så gäller

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\max(X-K,0)] = \mathrm{E}[X]\Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \\
&\text{och} \\
&\mathrm{E}[\max(K-X,0)] = K\Phi(-d_2) - \mathrm{E}[X]\Phi(-d_1) \\
&\text{där}\quad d_1 = \frac{1}{s}\ln(\mathrm{E}[X]/K) + \frac{s}{2}, \quad d_2 = d_1 - s
\end{aligned}$$

  Här är Φ standard normalfördelningen; se bifogad tabell.

- Ho-Lees binomialträd har specifikationen

$$r_j = \ln(Z_{j-1}/Z_j) + \ln[\cosh((j-1)\sigma)] + \sigma \textstyle\sum_2^j b_j$$

  där r_j är räntan från period $j-1$ till j (per period), Z_k är priset på en nollkupong som inlöses i period k, Δt är periodlängden och $\sigma = s\,\Delta t^{\frac{3}{2}}$ där s är standardavvikelsen för korta räntans (mer precist: en-periodsräntans per tidsenhet) förändring under en tidsenhet (år). Variabeln b_j antar värdena ± 1.

---

1. Bestäm priset på en europeisk köpoption på ett engelskt pund med leveranstid om 6 månader till inlösenpriset 15 kronor. Ett pund kostar idag 15.50 kronor och växelkursen (dvs. priset i kronor på ett pund) antas ha en volatilitet på 10% på ett år. Pundets ränta är 6% per år och kronans ränta 4% per år. Använd Blacks modell. (10p)

2. En portfölj av räntepapper har nuvärdet 10 000 kronor och durationen 5 år. Nu tar man en kort position på futureskontrakt med inlösen om ett år på en underliggande obligation. Futurespriset är 4 000 kronor, och om ett år är den underliggande obligationens duration 3 år (vid oförändrad "yield".) Uppskatta med hur mycket den totala portföljen (ursprungliga plus futuespositionen) ändras (ökar eller minskar) om "yielden" går upp med en hundradels procent. (10p)

3. Bestäm futurespriset på en obligation då futuren inlöses om sex månader. Efter inlösentiden ger obligationen efter sex månader (alltså ett år från idag) kupongutdelning på 300 kronor och efter ett år inlöses den till 10 300 kronor. Använd ett binomialträd med tidssteget sex månader, och antag att standardavvikelsen för förändringen i räntan under ett år är 4 procentenheter per år. Nuvarande räntestrukturen är 12% per år för alla löptider. (10p)

4. Bestäm priset på en europeisk option att om två år köpa en obligation för 10 000 kronor. Efter optionens inlösen ger obligationen en utdelning på 300 kronor efter ett halvår (dvs. 2.5 år från idag) och inlöses till 10 300 kronor efter ett år (tre år från idag.) Räntan är idag 6% per år för alla löptider, och "yieldens" standardavvikelse antas vara 1% under ett år. Använd Blacks modell. (10p)

5. Spotpriset på kaffe är 20 kronor per kilo. Antag att terminspriserna är som följer:

3 månader	19.60
6 månader	19.00
9 månader	18.00
12 månader	16.70

Volatiliteten för kaffepriset är 40% per år, och räntan är 6% per år. Använd ett binomialträd för att beräkna priset på en ettårig amerikansk köpoption på 100 kilo kaffe med inlösenpriset 2 000 kronor. Använd tidssteget tre månader.

6. Det är uppenbart att priset P_a på en amerikansk säljoption på en aktie som inte ger utdelning under optionens löptid är högre än eller lika med priset P_e för motsvarande europeiska option med samma inlösenpris K.

Denna uppgift går ut på att ge en övre gräns för hur mycket mer den amerikanska optionen kan kosta jämfört med den europeiska.

a) Visa att den vinst man kan göra genom att lösa in den amerikanska optionen i förtid, jämfört med att sälja motsvarande europeiska option vid samma tid, är högst

$$K(1 - e^{-r\tau})$$

där τ är tiden fram till inlösendatum och r räntan, som vi antar är ≥ 0. (5p)

b) Visa att

$$P_a \leq P_e + K(1 - e^{-rt})$$

där t är optionens löptid. Det är *mycket viktigt* att argumentet här är fullständigt övertygande. Ett förslag är att du använder *reductio ad absurdum* genom att antaga att

$$P_a > P_e + K(1 - e^{-rt})$$

och visar att detta ger möjlighet till ett arbitrage. (Tänk på att det är den långa innehavaren som bestämmer när en amerikansk option löses in. Tänk också på att den långa innehavaren alltid har tre möjligheter: lös in nu, lös in senare men fortfarande före slutdatum, behåll tills slutdatum.) (5p)