KTH Matematik
Harald Lang

Tentamensskrivning, 12/1-2005, kl 8.00–13.00.
5B1306 Finansiell Matematik gk.
Hjälpmedel: miniräknare

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering. Observera att redundant information kan förekomma.

En formel:

Om $X = ae^{sz}$ där $z \in N(0,1)$ och a, s och K är konstanter, så gäller

$$\mathrm{E}[\max(X - K, 0)] = \mathrm{E}[X]\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)$$

och

$$\mathrm{E}[\max(K - X, 0)] = K\Phi(-d_2) - \mathrm{E}[X]\Phi(-d_1)$$

$$\text{där}\quad d_1 = \frac{1}{s}\ln(\mathrm{E}[X]/K) + \frac{s}{2}, \quad d_2 = d_1 - s$$

Här är Φ standard normalfördelningen; se bifogad tabell.

---

1. En ränteswap består i att part A betalar part B den flytande ettårsräntan under år i i slutet av det året på beloppet (*"notational principal"*) $100\,000 + 25\,000i$ kronor för åren $i = 2, 3, 4$ (första betalningen sker alltså om två år, och sista om fyra år.) Observera att dessa räntor inte är kända idag, eftersom räntor varierar stokastiskt.

   Part B betalar part A det fixa beloppet c kronor i slutet av år 2, 3, och 4. Bestäm det arbitragefria värdet på c. Nollkupongräntorna (kontinuerliga) för löptiden 1, 2, 3 och 4 år är 4%, 5%, 6% och 7% per år. (5p)

2. Du skall bestämma priset för en amerikansk futures-köp-option på en aktie med inlösentid om åtta månader. Aktien kostar idag 80 kronor, och om fyra månader ger den en utdelning på 6% av det då gällande aktiepriset. Optionens inlösenpris är 75 kronor (optionen innebär alltså att man när som helst inom åtta månader kan lösa in optionen och erhålla $F - 75$ kronor, där F är aktiens futurespris vid tillfället.) Den underliggande futuren inlöses om 15 månader, och inga ytterligare utdelningar på aktien är aktuella under denna tid. Räntan är 6% per år (kontinuerlig förräntning.)

   Aktiens volatilitet antas vara 30% under ett år, vilket också kan antas vara futuresprisets volatilitet. Du får själv välja en lämplig modell att räkna i. Motivera varför den är lämplig! (10p.)

3. Ett binomialträd enligt Ho-Lees modell för korta räntan (kontinuerliga räntan under en period) ges av

0.05	0.06	0.07	0.08
	0.04	0.05	0.06
		0.03	0.04
			0.02

   Bestäm *forwardpriset* med inlösen om två perioder på en nollkupong som inlöses till 1 000 kronor om fyra perioder. Bestäm även motsvarande *futures-pris.* (10p.)

4. När man skall räkna numeriskt på räntemodeller använder man ofta ett *trinomialträd.* Skillnaden mot ett binomialträd är att man från varje nod kan gå *tre* vägar i stället för två:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & r_5 \cdots \\
 & r_2 & r_6 \cdots \\
r_1 & r_3 & r_7 \cdots \\
 & r_4 & r_8 \cdots \\
 & & r_9 \cdots
\end{array}
$$

Från r_1 kan man alltså gå till r_2, r_3 eller r_4, från r_2 till r_5, r_6 eller r_6, från r_3 till r_6, r_7 eller r_8, osv. Fördelen framför binomialträd är att man har större flexibilitet att anpassa trädet till olika modeller, och att noggrannheten blir större för given tidsindelning.

Om vi skall göra ett sådant binomialträd för Ho-Lees model så skall det första steget se ut så här:

$$
\begin{array}{cll}
 & a + \sigma\sqrt{3} & (\frac{1}{6}) \\
r_1 & a & (\frac{2}{3}) \\
 & a - \sigma\sqrt{3} & (\frac{1}{6})
\end{array}
$$

där σ har samma betydelse som i Ho-Lees binomialträd, och konstanten a skall anpassas till räntestrukturen. Talen längst ut till höger $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ anger sannolikheterna m.a.p. futuresmåttet att man kommer till respektive nod.

Du skall nu bestämma rätt uttryck för konstanten a uttryckt i σ, Z_1 och Z_2 (Z_i är priset på en nollkupong med inlösen om i tidsperioder.) (10p.)

5. För närvarande har vi en platt räntestruktur: (kontinuerliga) räntan är 5% per år för alla löptider.

En obligation som idag kostar 87 000 kronor ger utdelning 3 000 kronor varje halvår med början om sex månader, och dess duration har beräknats till 5 år.

a) Bestäm terminspriset (forward) för obligationen för inlösen om 15 månader. (5p)

b) Bestäm forward-durationen för obligationen vid denna tidpunkt (dvs. om 15 månader.) (5p)

c) Bestäm priset på en option som ger $f(X)$ om 15 månader, där f är någon funktion och X är obligationens värde vid inlösentiden. Vi antar att yieldens standardavvikelse under ett år är 0.7%. Du skall teckna priset med hjälp av ett väntevärde. (5p)

6. Antag att vi har ett futureskontrakt där inlösenvärdet är 100 kronor (deterministiskt) och inlösentiden är om tre dagar, dvs. $F_3 = 100$ kronor. Det är då klart (?) att futurespriset F_0 idag måste vara $F_0 = 100$ kronor. Men antag att av någon egendomlig anledning är $F_0 = 90$ kronor. Vi gör också det orimliga antagandet att räntan under en dag är 5%, dvs. 1 krona på banken en dag ger tillbaks 1.05 kronor nästa dag.

Ange en strategi som under dessa förhållande ger en arbitrage-vinst. Du skall alltså ha noll kassaflöde alla dagar utom om tre dagar, då du får en *säker* positiv utdelning, oavsett vad futurespriserna F_1 och F_2 råkar bli. (10p.)