KTH Matematik
Harald Lang

Tentamensskrivning, 25/8-2006, kl 8.00–13.00.
5B1306 Finansiell Matematik gk.
Hjälpmedel: miniräknare

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering. Observera att redundant information kan förekomma i uppgifterna. Räntor avser alltid kontinuerlig förräntning.

---

1. Vi är nu i slutet av år noll. En ränteswap arrangeras så att part A betalar till part B den flytande ettårsräntan på 50'000 kronor i slutet av år 2 och 3 och motsvarande ränta på 100'000 kronor i slutet av år 4. (I slutet av år två betalas alltså den nollkupongränta som gällde från slutet av år ett till slutet av år två, o.s.v. Dessa räntor är naturligtvis stokastiska sedda från idag, dvs. ännu inte kända.)

   B skall som ersättning betala ett fixt belopp c i slutet av år 2, 3 och 4 till A. Bestäm det korrekta värdet på c. Rådande nollkupongräntor är 3.0%, 3.5%, 4.0% och 4.5% för löptid på 1, 2, 3 respektive 4 år. (10p.)

2. En portföljförvaltares ränteportfölj har en duration på fem år och ett nuvärde på 1'000'000 kr. Han vill korta ner durationen till ungefär fyra år genom att ta korta positioner på futureskontrakt på en kupongobligation. Futureskontraktet inlöses om två år, och utbetalningarna senare än två år från den underliggande obligationen är 700 kr om 3 år, 700 kr om 4 år och 10'700 kr om 5 år. Aktuella nollkupongsräntor är (% per år med kontinuerlig förräntning)

2 år	3 år	4 år	5 år
6.0	6.8	7.2	7.44

   Bestäm positionens storlek, dvs. hur många futures-kontrakt? (Det är OK att räkna med futures-pris $\approx$ forward-pris.) (10p.)

3. Vi skall bestämma priset på en Europeisk säljoption på en Spansk obligation. Optionens inlösentid är om 18 månader och inlösenpriset är K **kronor**. Den underliggande obligationen är en 3-årig kupongobligation som ger 40 euro i kupongutdelning efter ett år och efter två år och inlöses till 1'040 euro efter tre år. Vi använder Black's prisformel

$$p = Z_t \,\mathrm{E}(\max[K - G_o e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t}\, z}, 0]) \quad z \in N(0,1)$$

   där p skall anges i kronor (liksom K är!) Bestäm värdena på Z_t och G_0 som skall användas i denna formel. Aktuella nollkupongräntor är i % per år:

löptid	1 år	1.5 år	2 år	3 år
kronor	3	3	3.3	3.5
euro	4	4.2	4.3	4.5

   En euro kostar idag 9.40 kr. (10p)

4. Bestäm priset på en "callable bond" med hjälp av ett Ho-Lee-träd. En "callable bond" är en obligation där den som ger ut den har rätt att (om han vill) lösa in den vid givna tidpunkter. Den aktuella obligationen är en kupongobligation som ger 300 kronor i utdelning varje halvår, och slutligen inlöses till 10'300 (inklusive kupongen) efter 2.5 år. Utgivaren har rätt att lösa in obligationen till 9'950 kronor plus kupongutdelning efter 18 månader.

   Det Ho-Lee-träd som skall användas är det här:

0-6	6-12	12-18	18-24	24-36	månader
3.0	3.3	3.5	3.8	4.0	
	2.9	3.1	3.4	3.6	
		2.7	3.0	3.2	
			2.6	2.8	
				2.4	

   Siffrorna är räntan i procent per halvår, dvs. per tidssteg i trädet. (10p.)

5. Låt r_i vara den stokastiska dagsräntan (per dag) från dag $i-1$ till dag i, och $R(t) = r_1 + \cdots + r_t$. Antag att $R(t)$ är normalfördelad med väntevärdet $\mathrm{E}^{(t)}[R(t)] = 0.14$ och variansen $\mathrm{Var}^{(t)}(R) = 0.04$ under forward-måttet med inlösentid t.

   Bestäm priset på en nollkupong med inlösenvärde 1 vid tiden t. *(Ledning: tänk efter, och gissa inte bara! Du måste motivera ordentligt för att få poäng!)* (10p.)

6. En amerikansk köpoption på en en tillgång som inte ger utdelning eller annan "convenience yield" är aldrig lönsam att lösa in i förtid. Bevisa detta påstående. Vi antar att räntor alltid är positiva.

   Gäller påståendet även "futures options" (underliggande värdet är ett futures-pris)? Om Ja, bevisa det, om Nej, vilket led i ditt bevis för första påståendet går inte igenom? (10p.)