Institutionen för matematik, KTH
R. Skjelnes

Tentamensskrivning, 2003-10-20, kl 08.00–13.00.
5B1307, Linjär Algebra g.k., 4 poäng.

Denna tentamen kommer i två delar. Del **A** utgjörs av uppgifterna 1-3, medan del **B** utgjörs av uppgifterna 4-6. Del **A** ger, inklusive bonuspoäng, maximalt 16 poäng.
Betygsgränserna är som följer. För godkänt krävs minst 16 poäng (inklusive bonuspoäng). För betyget 4 krävs 30 poäng. För betyget 5 krävs minst 40 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

---

1. Låt $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildningen
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4, -x_1 + 2x_3 - 4x_4 + x_5, 2x_2 - x_3 + x_5).$$
a) Hitta en matrisrepresentation för T med avseende på någon bas. (4 p)
b) Hitta en bas för $\mathrm{Null}(T)$. (4 p)
c) Bestäm dimensionen till $\mathrm{Im}(T)$. (4 p)

2. Låt U vara det linjära höljet till vektorerna
$$X = (1, 2, 3, 1) \quad Y = (4, 3, 1, 2) \quad \text{och} \quad Z = (9, 8, 5, 5).$$
a) Bestäm en ON-bas för U. (6 p)
b) Bestäm $\mathrm{proj}_U v$, där $v = (1, 1, 1, 0)$. (4 p)
c) Definiera det ortogonala komplementet $U^{\perp}$. (2 p)

3. Bestäm dom singuljära värderna till matrisen (6 p)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Låt M_2 vara vektorrummet av reella (2×2)-matriser. Vi definerar den linjära avbildningen $T : M_2 \to M_2$ vid
$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & -c \\ -b & d \end{bmatrix}.$$
a) Bestäm en matrisrepresentation för T med avseende på någon bas. (4 p)
b) Egenvärderna till T är $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$. Är T diagonaliserbar? (6 p)
c) Vi definierar en inreprodukt på V genom att sätta $< A, B >= \mathrm{Tr}(AB^T)$, där Tr är spåret till en matris. Låt $D \subset M_2$ vara delrummet av diagonala matriser. Beräkna
$$\mathrm{proj}_D X,$$
för en godtycklig vektor X i M_2. (6 p)

5. Låt V_n vara det reella vektorrummet av $(n \times n)$-matriser med *komplexa* koefficienter, och låt $H_n \subseteq V_n$ var delmängden av Hermitiska matriser.
a) Visa att H_n är ett delrum. (4 p)
b) Visa att dimensionen till H_n är n^2. (6 p)

6. Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett vektorrum V (inte nödvendigtvis ändligt dimensionelt). Antag att $\mathrm{Im}(T)$ har ändlig dimension k. Visa att T har maximalt $k + 1$ olika egenvärden. (8 p)

Lösningsförslag till tentamen i 5B1307, Linjär Algebra g.k., 4 poäng, 2003-10-20.

1. Matriserepresentasjonen til T med avseende på standard basis blir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

For å bestemme Null(T) bruker vi Gauss-Jordan eliminasjon på matrisen A ovenfor. Vi merker at den tredje raden i A er summen av de to foregående, og vidre at første og andre rad i A er linjært uavhengige. Dermed har vi at $x_1 = -2x_2 + 3x_3 - 4x_4$ og at $x_5 = 4x_4 - 2x_3 + x_1$. Vi har da at

$$\text{Null}(T) = \{(-2s + 3t - 4u, s, t, u, -2s + t) \mid s, t, u \in \mathbf{R}\}.$$

En basis blir da $\{(-2, 1, 0, 0, -2), (3, 0, 1, 0, 1), (-4, 0, 0, 1, 0)\}$.
Dimensjonen til Im(T) finner vi ved hjelp av dimensjonssatsen.

$$\text{Dim}(\text{im}(T)) = \text{Dim}(\mathbf{R}^5) - \text{Dim}(\text{Null}(T)) = 5 - 3 = 2.$$

---

2. Vi merker oss at $Z = X + 2Y$, slik at $U = \text{Span}(X, Y)$. Ved Gram-Schmidt finner vi $X' = X$ og

$$Y' = Y - \frac{X' \cdot Y}{||X'||^2} X' = (3, 1, -2, 1).$$

Etter normalisering finner vi at $X'' = \frac{1}{\sqrt{15}} X'$ og $Y'' = \frac{1}{\sqrt{15}} Y'$ er en ON-basis for U.
Vi beregner $\text{proj}_U(1, 1, 1, 0)$ ved å bruke ON-basisen som vi fant over. Vi får da at

$$\text{proj}_U(1, 1, 1, 0) = ((1, 1, 1, 0) \cdot X'')X'' + ((1, 1, 1, 0) \cdot Y'')Y''.$$

Ved å regne ut uttrykket over får vi

$$\text{proj}_U(1, 1, 1, 0) = \frac{6}{\sqrt{15}} X'' + \frac{2}{\sqrt{15}} Y''.$$

---

3. Vi regner først ut produktet

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deretter regner vi ut det karakteristiske polynomet $c(\lambda)$ til $A^T A$ som

$$c(\lambda) = \det(\lambda - A^T A) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 9).$$

Følgelig har $A^T A$ egenverdiene $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ og $\lambda = 9$.

Svar: De sinulære verdiene til A er $0, 1$ og 3.

---

4. En basis for M_2 er de fire matrisene

$$E_j = \begin{bmatrix} \delta_{1,j} & \delta_{2,j} \\ \delta_{3,j} & \delta_{4,j} \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

der $\delta_{i,j} = 0$ om $i \neq j$ og 1 ellers. Matriserepresentasjonen av T med avseende på basis $\beta = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ blir da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har gitt at egenverdiene til T er ± 1. For at T skal være diagonaliserbar må dimensjonen til egenrommene summere opp til dimensjonen av M_2, dvs.

$$\text{dim}ES_{\lambda=-1} + \text{dim}ES_{\lambda=1} = \dim(M_2) = 4.$$

Egenrommet $ES_{\lambda=-1}$ bestemmes av ligningen $T(X) = -1X$, dvs. det som vi må avgjøre er hvorvidt

$$\begin{bmatrix} a & -c \\ -b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}.$$

Og vi finner at $a = d = 0$, mens $b = c$. Dette egenrommet er altså av dimensjon 1. Det andre egenrommet bestemmes av ligningen $T(X) = X$. Dette gir kun restriksjonen at $b = -c$, og er dermed 3 dimensjonelt. Ja, operatoren T er diagonaliserbar.
En basis for delrommet av diagonale matriser er $\beta = \{E_1, E_4\}$. Disse to matrisene er ortogonale under det gitte indreproduktet, og begge to har lengde 1. Dermed har vi at β er en ON-basis. Derfor har vi at

$$\mathrm{proj}_D(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \mathrm{Tr}(XE_1^T)E_1 + \mathrm{Tr}(XE_2^T)E_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

---

5. En matris A er Hermitisk om $B = B^*$. Det er klart at null-matrisen oppfyller dette kravet. Vidre, om A og B er Hermitiske har vi at $(A + B)^* = A^* + B^* = A + B$, og følgelig er mengden H_n lukket under sum. For en reell skalær r har vi også at $(rA)^* = rA$, om A er Hermitisk. Vi har da vist at H_n er et delrom.
For å beregne dimensjonene til H_n merker vi oss at diagonalelementene må være reelle i en Hermitisk matris A, og at elementene på øvre diagonalen bestemmer de på nedre. Vi konstruere da følgende matriser som danner en basis for H_n. Først har vi n-stykk matriser D med en 1 på diagonalen, og null ellers. Deretter konstruerer vi matriser E som har en 1 over diagonalen, og en 1 på tilsvarende plass under diagonalen. Og til slutt matriser F som har den imaginære roten i over diagonalen, og $-i$ på tilsvarende plass under diagonalen. Disse matrisene er lineært uavhengige og danner en basis for H_n. Antallet matriser E er lik antallet matriser F som igjen er lik antallet element over diagonalen. Vi summerer opp antallet konstruerte matriser

$$\mid D \mid + \mid E \mid + \mid F \mid = n + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n + n^2 - n = n^2,$$

som altså tilsvarer dimensjonen til H_n.

---

6. La X være en egenvektor og λ en egenverdi. Om $\lambda \neq 0$ da vil $T(X) = \lambda \cdot X \neq 0$, og følgelig selv være en egenvektor med egenverdi λ. La $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ være null-skilte og forskjellige egenverdier til T, og la $X_1, \ldots, X_l$ være tilhørende egenvektorer. Vi har at egenvektorer med forskjellige egenverdier er linjært uavhengige. Da egenverdiene $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ er forskjellig fra null vil $T(X_1), \ldots, T(X_l)$ være egenvektorer med forskjellige egenverdier, og altså lineært uavhengige. Av antagelsen om dimensjonen til $\mathrm{im}(T)$ har vi at $l \leq k$. Dermed har vi at T har maksimalt k antall nullskilte og forskjellige egenverdier, og følgelig at T har maksimalt $k+1$ forskjellige egenverdier.
