Institutionen för matematik, KTH
R. Skjelnes

**Prov, 2003-xx-xx, kl 08.00–13.00.**
**5B1307, Linjär Algebra g.k., 4 poäng.**

Denna tentamen kommer i två delar. Del **A** utgjörs av uppgifterna 1-2, medan del **B** utgjörs av uppgifterna 3-5. Del **A** ger, inklusive bonuspoäng, maximalt 16 poäng.
Betygsgränserna är som följer. För godkänt krävs minst 16 poäng (inklusive bonuspoäng). För betyget 4 krävs 30 poäng, varav 14 poäng från del **B**. För betyget 5 krävs 40 poäng, varav 24 poäng från del **B**.
Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

---

1. Vi har delrummet $H \subseteq \mathbf{R}^5$ definierad av ekvationen

$$6x_1 + 2x_2 - 4x_4 - 2x_5 = 0.$$

a) Hitta en bas för $H$. (4 p)
b) Hitta en bas för det ortogonala komplementet $H^{\perp}$. (4 p)
c) Hitta en ON-bas för $U = \mathrm{Span}\{X, Y, Z\}$, där (4 p)

$$X = (1, -3, 1, 0, 0), \quad Y = (1, 0, 2, 1, 1) \quad \text{och} \quad Z = (3, -3, 5, 2, 2).$$

d) Beräkna $\mathrm{proj}_U(1, 1, 1, 1, 1)$. (4 p )
e) Visa att $U$ är ett delrum av $H$. Kan $U = H$?. (4 p)

2. Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Vad är rangen till $A$. (4 p)
b) Bestäm en QR-faktorisering till $A$. (6 p)

3. Låt $V = P_m$ vara det reella vektorrummet av polynom i en variabel $x$, och av grad mindre eller lika med det fixerade heltalet $m \geq 0$. Låt $T : V \to V$ vara den linjära avbildningen som skickar en vektor $p(x) \in V$ till

$$T(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}.$$

a) Bestäm en bas för $\mathrm{Im}(T)$. (4p)
b) Bestäm egenvärdena till $T$. (4p)
Vektorrummet $P_m$ ger vi inreproduktstrukturen

$$< p(x), q(x) >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

c) Låt $m = 5$, och hitta en ON-bas för delrummet $P_2 \subseteq P_5$. (4p)
d) Bestäm projektionen $\mathrm{proj}_U p(x)$, med $U = P_2$, for en godtycklig vektor $p(x) \in P_5$. (4p)

4. Låt $Mat_{m,m}$ vara vektorrummet av kvadratiska $(m \times m)$-matriser (här är $m > 0$ ett fixerat heltal). Vi säger att en kvadratisk matris $A$ är nilpotent om det finns ett heltal $r > 0$ sådan att $A^r = 0$ (observera att talet $r$ beror på matrisen $A$). Låt $Nil \subseteq Mat_{m,m}$ vara delmängden av nilpotenta matriser.
a) Låt $A$ och $B$ vara två nilpotenta matriser med i $Nil$. Antag att $AB = BA$. Visa att matrisen $A + B$ är nilpotent. (4p)
b) Visa eller motbevisa att $Nil$ är ett delrum av $Mat_{m,m}$. (6p)

5. Låt $\mathbf{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbf{R}, i \in \mathbf{N}\}$ vara mängden av ordnade reella tal, indekserad av dom positiva heltalen. Denna mängd er ett vektorrum ved komponentvis addition och skalär multiplikation. Låt $T : \mathbf{R}^\infty \to \mathbf{R}^\infty$ vara den linjära operatoren

$$T(x_1, x_2, \ldots,) = (x_2, x_3, \ldots).$$

Bestäm egenvärden och egenvektorerna till $T$. (8 p)

Lösningsförslag till tentamen i 5B1307, Linjär Algebra g.k., 4 poäng, 2003-xx-xx.

**1.** $\boxed{\textbf{Svar: } 123.}$

**2.** $\boxed{\textbf{Svar: } 123.}$

**3.** Avbildningen $T$

Uppgift a). Vi har att $(1, x, \ldots, x^m)$ är linjärt oberoende och derför en bas för $V$, sådan att $(T(1), T(x), \ldots, T(x^m))$ spänner upp vektorrummet Range$(T)$. Vi har att

$$T(x^m) = m2^m x^{m-1}, \quad D(x^m) = mx^{m-1}$$

sådan att $(T(x), \ldots, T(x^m))$ (respektivt $(D(x), \ldots, D(x^m))$ är linjärt oberoende och dermed en bas. Multiplicerar man bort skalärerna $m2^m$ får man tilbaka dom $m-1$ första vektorerna i basen $(1, x, \ldots, x^m)$.

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{En bas är } (1, x, \ldots, x^{m-1}).}$

Uppgift b). Matrisrepresentationen till $T$ med avseende på basen $(1, x, \ldots, x^m)$ blir den övretriangulära matrisen

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \\ \vdots & \ddots & 0 & m2^m \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \\ \vdots & \ddots & 0 & m \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

varifrån vi leser av att det enda egenvärdet är 0. $\boxed{\textbf{Svar: } \text{Egenvärdet är } 0}$

Uppgift c). Vi vill använda Gram-Schmidt på basen $(1, x, x^2)$ för att fremskaffa en ON-bas. Låt $u' = 1$. Vi har att $< u', u' >= 2$, sådan at vektoren

$$u = \frac{u'}{||u'||} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

har längd 1. Låt nu

$$v' = x - < u, x > u = x$$

då $< 1, x >= 0$. Vi har att $< v', v' >=< x, x >= \dfrac{2}{3}$ sådan att

$$v = \frac{v'}{||v'||} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

är vinkelrät på $u$ och har längd 1. Slutligen låter vi

$$w' = x^2 - < v, x^2 > v - < u, x^2 > u = x^2 - < u, x > u = x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, x > u = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Denna vektor $w'$ är då vinkelrät på båda vektorerna $u$ och $v$. Vi vill normalisera denna och har att

$$< w', w' >=< x^2, x^2 > -\frac{2}{3} < x^2, 1 > +\frac{1}{9} < 1, 1 >= \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

$\boxed{\textbf{Svar:}\text{En ON-bas är } (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}).}$

**4.** Om vi har at $AB = BA$ då vill

$$(A+B)^R = \sum_{i=0}^{R} \binom{R-i}{i} A^i B^{R-i},$$

där $A^0 = B^0 = I$. Vi har att om $n + m = R$ för två icke-negativa tal $n, m$, då måste antingen $m$ eller $n$ vara större enn halva $R$. Om $A^{r_1} = 0$, och $B^{r_2} = 0$ för några heltal $r_1$ och $r_2$, då låter vi $R$ vara två gånger det största värdet av $r_1$ och $r_2$. Det följer då av ekvationen över at $(A+B)^R = 0$. Dvs, om $A$ och $B$ är nilpotenta, och vi har at $AB = BA$, då är också summan $A + B$ nilpotent.

Matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad och \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

är båda nilpotenta då $A^2 = B^2 = 0$, dock är deras summa $A + B$ ej nilpotent. Vi har nämligen at $(A+B)^2 = I$ sådan at $(A+B)^R = I$ om $R$ är jämn, och om $R$ är udda har vi at $(A+B)^R = A + B$. Vi har då at mängden $Nil$ av nilpotentat matriser ej är ett delrum då mängden ej är sluten under addition.