KTH Matematik

Kontrollskriving
5B1307 Linjär algebra g.k.
13 September, 2005

- *skrivtid:***16:30-17:00**
- *Tillåtna hjälpmedel:miniräknare med sifferdisplay, ingen bok!*
- *motivering krävs!*
- *Svar till båda delar krävs för* **godkänd**!

Låt $W = \{A = (a_{i,j}) \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ sådan att $a_{1,1} = 0\}$. Till exempel är

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \in W$$

(1) Visa att W är ett delrun av $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in W$$

(a)

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \end{pmatrix} \in W$$

(b)

$$kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ ka_2 & ka_3 \end{pmatrix} \in W$$

(2) Bestäm $\dim(W)$. Varje element

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \in W$$

kan skrivas som:

$$a_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

då är

$$W = span\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende:

$$k_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ger att

$$\begin{pmatrix} 0 & k_1 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och det betyder att $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Då är

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en bas och

$$\dim(\mathbf{W}) = \mathbf{3}.$$