KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

31 Augusti, 2005

Frågor

(1) Vad betecknar vi med $\mathbb{R}^n$?
  (a) Ge ett algebraiskt svar;
  (b) Ge ett geometriskt svar.

(2) Definera den euklidiska inre produkt på $\mathbb{R}^n$.
  (a) Lista några viktiga egenskaper:
  (b) beskriva hur kan man skriva $u \cdot v$ på matris form.

(3) Definera normen $\| u \|$, där $u \in \mathbb{R}^n$.

(4) Definera distansen $d(u, v)$ av två vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$.

(5) När är två vektorer i $\mathbb{R}^n$ ortogonala?

Svar

(1) (a) $\mathbb{R}^n = \{(a_1, .., a_n)$ sådan att $a_i \in \mathbb{R}\}$. Man kan definiera en addition:

$$(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$

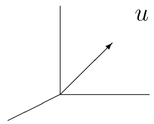
och en multiplication med skalär:

$$k(a_1, ..., a_n) = (ka_1, ..., ka_n).$$

Låt $u = (a_1, ..., a_n), v = (b_1, ..., b_n)$, och $0 = (0, ..., 0)$, då gäller att:

(i) $-u = (-a_1, ..., -a_n)$.
(ii) $u + v = v + u$.
(iii) $u + 0 = u$.
(iv) $u + (-u) = 0$.
(v) $k(u + v) = ku + kv$.
(vi) $1u = u$.
(vii) $k(mu) = kmu$.
(viii) $(k + m)u = ku + kv$.

(b) Man tänker på $u = (a_1, ..., a_n)$ som en pil från origon till punkten med coordinater $(a_1, ..., a_n)$.



$u = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$

$0 = (0, ..., 0)$ kallas *nollvektor*.

Längden av u kan tänkas som längden of en riktad sträcka som hör till u, och betecknas som $|u|$, eller $\| u \|$.
Motsvarande operationer:
låt u, v vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$. Om man ställer beginnelsepunkt av v på slutpunkten av u, då har man en vektor, pilen från 0 till v, som är $u + v$.

Vektoren ku definieras som vektoren av längd $|k||u|$ och samma riktning som u om $k > 0$ och motsatt riktning om $k < 0$. Om $k = 0$ är ku nollvektoren.

(2) Den euklidiska inre produkten på $\mathbb{R}^n$ utpeckar en skalär till två vektorer:

$$u, v \in \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; u \cdot v = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \in \mathbb{R}$$

(a) Några viktiga egenskaper är:
  (i) $u \cdot v = v \cdot u$;
  (ii) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$;
  (iii) $ku \cdot w = k(u \cdot w)$;
  (iv) $u \cdot u \geq 0$ och $u \cdot u = 0$ om och endast om $u = 0$.

(b) Vi betecknar vektoren v med en matris av n rader och ett kolumn:

$$[u] = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

Låt $[u]^T = (a_1, ..., a_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ vara transponerad matrisen av $[u]$. Då har vi att:

$$u \cdot v = [u]^T[v] = (a_1, ..., a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

(3) $\| u \| = \sqrt{u \cdot u}$. Från egenskaperna av inreprodukten följer det att:

(a) $\| u \| \geq 0$ och $\| u \| = 0$ om och endast om $u = 0$.
(b) $|u \cdot v| \leq \| u \| \cdot \| v \|$.
(c) $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$.(Triangelolikheten).
(d) $\| ku \| = |k| \| u \|$.

(4) $d(v, u) = d(u, v) = \| u - v \|$.

Från (a), i (3), kan man visa att $d(u, v) \geq 0$ for varje $u, v \in \mathbb{R}^n$ och att $d(u, v) = 0$ om och endast om $u = v$.

Dessutom från (c) ser man att $d(u, v) \geq d(u, w) + d(w, v)$.

(5) Två vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ är ortogonala om $u \cdot v = 0$.
Pytagoras sats gäller i $\mathbb{R}^n$, det säger att:
om $u, v \in \mathbb{R}^n$ är två ortogonala vektorer då är

$$\| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2 .$$