

FRÅGOR

- (1) Låt $F : A \rightarrow B$ vara en avbildning. När är F injektiv (one-to-one)? När är F inverterbar?
- (2) När är en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv? När är F inverterbar?
- (3) Låt $e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ vara den standard basen till \mathbb{R}^n . Låt $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Hur kan man definiera $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ från $T(e_1), \dots, T(e_n)$?
- (4) Låt $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en avbildning. Ge alla ekvivalenta definitioner för F att vara linjär.

SVAR

- (1) F kallas en injektiv avbildning om F ordnar två olika element $F(a) \neq F(b)$ i B till två olika element $a \neq b$ i A .

Så är F injektiv om den fljande gäller:

$$F(a) = F(b) \Rightarrow a = b$$

F kalls inverterbar om det finns en invers avbildning, i.e. en avbildning $F^{-1} : B \rightarrow A$ sådan att $F \circ F^{-1} = id_B$ och $F^{-1} \circ F = id_A$.

- (2) Om $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning (Obs samma dimension) då gäller att:

$$F \text{ är injektiv} \Leftrightarrow F \text{ är inverterbar} \Leftrightarrow R(F) = \mathbb{R}^n$$

Dessutom om F är en inverterbar linjär avbildning då är $F^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ också linjär och

$$[F^{-1}] = [F]^{-1}.$$

- (3) Kolumnerna av matrisen $[F]$ motsvara vektorer $F(e_i)$.

$$[F] = [F(e_1)|F(e_2)|\dots|F(e_n)]$$

Så definitionen av F är:

$$[F(e_1)|F(e_2)|\dots|F(e_n)] \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

(4) De följande påståenden är ekvivalenta:

(a) $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är linjär.

(b) Det finns en matris $[F] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ sådan att

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_m \end{pmatrix} = [F] \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

där $F(x_1, \dots, x_n) = (w_1, \dots, w_m)$.

(c) För varje $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ är $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$

och för varje $k \in \mathbb{R}$ är $F(kv) = kF(v)$.

Observera att den följande gäller:

• $F(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$.

• F är injectiv om och endast om

$$F(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$$