KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

06 September, 2005

Frågor

(1) Vad betecknar vi med P_k?

(2) Vad är ett (reelt) vektorrum?

(3) Lista några exempler av vektorrum.

(4) Låt V vara ett vektorrum och $W \subseteq V$ vara en delmängd av V. När är W ett delrum?

(5) Lista några exempler av delrum.

Svar

(1) P_k betecknar alla polynom med koefficienterna i $\mathbb{R}$ i en variabel x och av grad $\leq k$:

$$P_k = \{p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k \text{ sådan att } a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Varje element $p(x) \in P_k$ definierar en vektor $[p] = (a_0 + ... + a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$.

Vi har två operationer på P_k:

- $p_1(x) + p_2(x) = (a_0 + a_1x + ... + a_kx^k) + (b_0 + b_1x + ... + b_kx^k) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + ... + (a_k + b_k)x^k$
- $hp(x) = h(a_0 + a_1x + ... + a_kx^k) = ha_0 + ha_1x + ... + ha_kx^k$.

Det gäller att $[p_1(x) + p_2(x)] = [p_1(x)] + [p_2(x)]$ och $[hp(x)] = h[p(x)]$.

(2) Ett (reellt) vektorrum består av en mängd V med två operationer:

$$+ : V \times V \to V \quad \text{som ordnar } (v_1, v_2) \to v_1 + v_2 \in V$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V \quad \text{som ordnar } (k, v_2) \to kv_2 \in V$$

such that:

(a) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.

(b) $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$.

(c) det finns ett element (nollvektor) $\vec{0} \in V$ sådan att $\vec{0} + u = u$ for alla $u \in V$.

(d) varje element v har ett inverselement, dvs det finns $-v \in V$ sådan att $v + (-v) = \vec{0}$.

(e) $k(u + v) = ku + kv$.

(f) $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$.

(g) $k_1(k_2u) = (k_1k_2)u$.

(h) $1u = u$.

Vi betecknar den med $(V, +, \cdot)$.

Viktiga egenskaper:

- För varje $v \in V$ är $0v = \vec{0}$.
- För varje $k \in \mathbb{R}$ är $k\vec{0} = \vec{0}$.
- För varje $v \in V$ är $(-1)v = -v$.
- Om $ku = \vec{0}$ då är $k = 0$ eller $u = \vec{0}$.

(3) (a) $\{0\}$. (inget att kolla!).
(b) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.
(c) $(M_{n,m}(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Här är $\vec{0}$ nollmatrisen och inversen av $A = (a_{ij})$ är $-A = (-a_{ij})$.
(d) $(P_k, +, \cdot)$, se (1).
(e) $(F(-\infty, \infty), +, \cdot)$, där $F(-\infty, \infty)$ betecknar mängden an funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, med de följande operationer: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(kf)(x) = kf(x)$. Här är $\vec{0}$ nollfunktionen $0(x) = 0$ och är inversen till $f(x)$ funktionen $(-f)(x) = -f(x)$.

(4) W är ett delrum om operationen kan definieras påW, dvs om de följande gäller:
(a) För varje $w_1, w_2 \in W$ är $w_1 + w_2 \in W$.
(b) För varje $w \in W$ och $k \in \mathbb{R}$ är $kw \in W$.

(5) (a) $\{\vec{0}\} \subset V$, för varje vektorrum V.
(b) $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ för $m \leq n$.
(c) $P_k \subset C^\infty(-\infty, \infty) \subset C^m(-\infty, \infty) \subset C^1(-\infty, \infty) \subset C(-\infty, \infty) \subset F(-\infty, \infty)$.
(d) Om $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning då är $Ker(F) = \{v \in \mathbb{R}^n$ sådan att $F(v) = \vec{0}\}$ ett delrum av $\mathbb{R}^n$.
Observera att F är injektiv om och endast om $Ker(F) = \{\vec{0}\}$.