KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.
19 September, 2005

Frågor

(1) Låt $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ vara en inverterbar matris. Vad är den **QR-decomposition** av A?

(2) Betrakta systemet $A\vec{x} = \vec{b}$. Vad är en **minstakvadratalösning** (least square)?

(3) Hur hittar man en minstakvadratalösning?

(4) Låt W vara ett delrum an $\mathbb{R}^n$. Definiera avbildningen:

$$P_W : \mathbb{R}^n \to W$$

som $P_W(\vec{v}) = proj_W(\vec{v})$. Vilken matris associerar vi till den?

Svar

(1) Låt $\vec{c_1}, ..., \vec{c_n}$ vara kolumn-verktorerna av A. Eftersom är A inverterbar, $\det(A) \neq 0$. Det Betyder att kolumnerna är linjärt oberoende, som innebärar att $\vec{c_1}, ..., \vec{c_n}$ är en bas till $Col(A)$. Genom G-S process kan vi utgöra en ON-bas, $\vec{q_1}, ..., \vec{q_n}$

Låt Q vara matrisen som har q_i som kolumner, vi säger att Q har ON-kolumner. Då kan man visa att:

$$A = QR$$

där $R \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ är en över-triangulär matris.

(2) En **minstakvadratalösning** till $A\vec{x} = \vec{b}$ är vektorn $\vec{x}$ med minsta normen $\| A\vec{x} - \vec{b} \|$, (minsta möjliga distansen mellan $A\vec{x}$ och $\vec{b}$).
Man ser att:
En minstakvadratalösning till
$A\vec{x} = \vec{b}$ är en lösning till

$$A\vec{x} = proj_{Col(A)}(\vec{b}).$$

(3) Till $A\vec{x} = \vec{b}$ ordnar man systemet:

$$A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}$$

Det kallas den *normala systemet* och det har minst en lösning.

$\boxed{\text{minstakvadratalösningar av } A\vec{x} = \vec{b} \text{ är lösningar till } A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}.}$

Det gäller att:

$$A \text{ har L.I. kolumner} \;\Leftrightarrow\; A\vec{x} = \vec{b} \text{ har en entydig lösning } \vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

(4) $P_W(\vec{v}) = proj_W(\vec{v})$ kallas den **ortogonala projektion på** W.

Den är en linjär function (tänk på W som en mindre $\mathbb{R}^k$.). låt $(\vec{w_1}, ..., \vec{w_k})$ vara en bas till W och låt A vara matrisen med $\vec{w_i}$ som kolumner.

Då har P_W matrisen:

$$[P_W] = A(A^T A)^{-1} A^T.$$