KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

20 September, 2005

Frågor

(1) Låt V vara ett vektorrumm och B, B' två baser av V. Om man vet koordinaterna av en vektor v med avseende till en bas B, $(v)_B$, hur kan man hitta $(v)_{B'}$? Vad är den **basbyte matris**?

(2) Vad är en **ortogonal matris?**.

(3) Vad är en **ortogonal linear avbildning**?

(4) Låt $A \in M_{n,n}\mathbb{R}$. Vad är en **egenvektor** och ett **egenvärde** av A?

Svar

(1) Låt $B = (\vec{u_1}, ..., \vec{u_r}), B' = (\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$. Antar att

$$(v)_{B'} = \begin{pmatrix} k_1 \\ ... \\ k_r \end{pmatrix}$$

betrakta vektorn av koordinater med avseende av basen B' och $(v)_B$ betrakta vektorn av koordinater med avseende av basen B. Låt P vara den $r \times r$ matrisen:

$$P = \begin{pmatrix} (v_1)_B & ... & (v_r)_B \end{pmatrix}$$

Då är P inverterbar och:

$$(v)_B = P(v)_{B'} \quad \text{och} \quad (v)_{B'} = P^{-1}(v)_B$$

(2) En matris $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ är **ortogonal** om och endast om

$$A^T = A^{-1}.$$

På likande sätt kan man säga att:

$$A \text{ är ortogonal} \quad \Leftrightarrow \quad AA^T = A^T A = I_n$$

och om $(\vec{c_1}, ..., \vec{c_n}), (\vec{r_1}, ..., \vec{r_n})$ är kolumnvektorer, respektive radvektorer, av A:

$$A \text{ är ortogonal} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \vec{c_1}, ..., \vec{c_n} \text{ är en} \\ \text{ON bas till } (\mathbb{R}^n, \cdot) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \vec{r_1}, ..., \vec{r_n} \text{ är en} \\ \text{ON bas till } (\mathbb{R}^n, \cdot) \end{array}$$

Dessutom :

(a) Om A är ortogonal då är $\det(A) = 1$ eller -1.

(b) A^{-1} är ortogonal.

(c) Om A, B är ortogonala då är AB ortogonala.

Man kan ocks visa att:

$$A \text{ är ortogonal} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \| A\vec{x} \| = \| \vec{x} \| \\ \text{för all } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} A\vec{x} \cdot A\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y} \\ \text{för all } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

(3) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en **ortogonal linear avbildning** om matrisen $[T]$ är en ortogonal matris.

En basbyte matris från eller till en ON bas är ortogonal så är basbytens linear avbildningen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (v)_B & \mapsto & (v)_{B'} \end{array}$$

ortogonal.

(4) En **egenvektor** till A är en vektor $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sådan att $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Den motsvarande $\lambda \in \mathbb{R}$ kallas **egenvärdet** till $\vec{v}$.

Egenvärden är lösningar till det **karakteristiskt oplynom**:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Obs: Om A är en övertriangulär eller undertriangulär matris då är egenvärden matriselementerna på diagonalen.