KTH Matematik

# 5B1307 Linjär algebra g.k.

21 September, 2005

## Frågor

(1) Låt $\lambda$ vara ett egenvärde till $A$. Hur hittar man **egenrummet** $E_\lambda$?

(2) Låt $\lambda$ vara ett egenvärde till $A$. Vad är den **algebraiska multiplicitetet** (**a.mul(**$\lambda$**)**) av $\lambda$? Vad är den **geometriska multiplicitetet** (**g.mul(**$\lambda$**)**) av $\lambda$?

(3) När är en matris $A$ **diagonaliserbar**?

(4) När är en matris $A$ **ortogonalt diagonaliserbar**?

(5) Vad händer när $A$ är **symmetrisk**?





## Svar

(1) $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Enligt definitionen är:

$$E_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} = N(A - \lambda I_n)$$

Så man ska lösa systemet $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$

(2) Om $\lambda_i$ är ett egenvärde till $A$, då delar $(\lambda - \lambda_i)$ $P_A(\lambda)$..
Det betyder att:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k(\lambda - \lambda_1)^{k_1}...(\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

Där $k_i$ är alla egenvärden (mjligtvis komplexa). Då är:

- $a.mul(\lambda_i) = k_i$.
- $g.mul(\lambda_i) = \dim(E_{\lambda_i})$.

(3) En matris $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ är diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sådan att:

$$P^{-1}AP = D$$

där $D$ äe en diagonal matris.

Man ser att

$$A \text{ är diagonaliserbar} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ har } n \text{ L.I. egenvektorer}$$

I så fallet om $\lambda_1, ..., \lambda_n$ är motsvarande egenvärden (några kan vara lika) då finns det en inverterbar matris $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sådan att:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Viktigt: *Om $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ har $n$ olika egenvärde då är $A$ diagonaliserbar.*

Om $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ inte har $n$ olika egenvärde då:

$$A \text{ är diagonaliserbar} \quad \Leftrightarrow \quad a.mul(\lambda_i) = g.mul(\lambda_i) \text{ för alla egenvärden} \lambda_i$$

(4) En matris $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ är ortogonalt diagonaliserbar om :

- $A$ är diagonaliserbar , d.v.s. det finns en inverterbar matris $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sådan att:
$$P^{-1}AP = D$$
där $D$ är en diagonal matris.
- $P$ är ortogonal.

(5) Det gäller att:

$A$ är symmetrisk $\Rightarrow$ (1) alla egenvärden är i $\mathbb{R}$
(2) eigenvektorer från **olika** egenvärde är ortogonala

Då kan man visa att:

$A$ är **ortogonalt diagonaliserbar** $\Leftrightarrow$ $A$ har en **ON-bas** av **egenvektorer** $\Leftrightarrow$ $A$ är **symmetrisk**