KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.
26 September, 2005

Frågor

(1) Låt V, W vara två vektorrum. Vad är en **lnjär avbildning** $T : V \to W$?

(2) Definiera **sammansättningen** av $T_1 : V \to W$ och $T_2 : W \to Z$.

(3) Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning. Definiera **Ker(T)** och **R(T)**.

(4) Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning. Definiera rangen **rk(T)** och **nullity(T)**.

(5) Hur beräcknar man **rk(T)** och **nullity(T)**?

Svar

(1) En avbildning $T : V \to W$ är linjär om
(a) $T(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = T(\vec{v_1}) + T(\vec{v_1})$ för all $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$.
(b) $T(k\vec{v}) = kT(\vec{v})$ för alla $\vec{v} \in V, k \in \mathbb{R}$.
Exempel:
- $T : V \to W, T(\vec{v}) = \vec{0}$, för alla $\vec{v} \in V$.
- $id : V \to V, T(\vec{v}) = \vec{v}$, för alla $\vec{v} \in V$.
- Efter vi fixar en $a \in \mathbb{R}$ kan vi definiera linjär avbildningen: $T_a : V \to V, T(\vec{v}) = a\vec{v}$, för alla $\vec{v} \in V$.
- Låt V vara ett vektorrum med $\dim(V) = n$. För varje bas B kan man definiera den linjära avbildniningen:
$$T : V \to \mathbb{R}^n, \quad T(v) = (v)_B$$
- $T : P_n \to P_{n+1}, T(p(x)) = xp(x)$.
- $T : P_n \to P_{n-1}, T(p(x)) = p'(x)$.

Egenskaper: Om T är en linjär avbildning då:
- $T(\vec{0}) = \vec{0}$.
- $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$.
- $T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$.
- Låt $B = (\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ vara en bas och $(\vec{v})_B = (k_1, ..., k_n)$, då är:
$$T(\vec{v}) = k_1 T(\vec{v_1}) + ... + T(\vec{v_n}).$$

(2) Låt $T_1 : V \to W$ och $T_2 : W \to Z$. vara två linjära avbildningar. **Sammansättningen** definieras som:
$$T_2 \circ T_1 : V \to Z, \quad T_2 \circ T_1(\vec{v}) = T_2(T_1(\vec{v}))$$
för alla $\vec{v} \in V$.
Avbildningen $T_2 \circ T_1$ är också linjär.

(3)
- $\mathbf{Ker(T)} = \{\vec{v} \in V \text{ med } T(\vec{v}) = \vec{0}\} \subseteq V$.
- $\mathbf{R(T)} = \{\vec{w} \in W \text{ med } T(\vec{v}) = \vec{w} \text{ för någon } \vec{v} \in V\} \subseteq W$.

De är båda delrum.

(4) **rk**(**T**) $= \dim(R(T))$ och **nullity**(**T**) $= \dim(Ker(T))$.
Om $V = \mathbb{R}^n$ och $W = \mathbb{R}^m$ då är $[T] \in M_{m,n}\mathbb{R}$ och:
• $rk(T) = \dim(R(T)) = \dim(Col(T)) = rk([T])$.
• $nullity(T) = \dim(Ker(T)) = \dim(N([T])) = nullity([T])$.

(5) Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning, med $\dim(V) = n$. Då gäller att:

$$n = rk(T) + nullity(T).$$