KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

27 September, 2005

Frågor

(1) När är en linjär avbildning $T : V \to W$ **injectiv**?

(2) Låt $T : V \to V$ vara en linjär avbildning. Vad betyder att T är **injectiv**?

(3) När kan man definiera **inversen** av en linjär avbildning?

(4) Låt B vara en bas till V och B' vara en bas till W. Vilken **matris** $[T]_{B'B}$ associerar vi till an linjär avbildning $T : V \to W$?

(5) När $T : V \to V$ är injektiv, vad kan man säga om $[T]_B$?

Svar

(1) En linjär avbildning $T : V \to W$ är injectiv om två oliva vektorer i V går, genom T, till två oliva vektorer i W. Man ser att:

$$\underset{\text{är injektiv}}{T : V \to W} \;\Leftrightarrow\; \underset{\text{då är } v_1 = v_2}{\text{om } T(v_1) = T(v_2)} \;\Leftrightarrow\; Ker(T) = \{\vec{0}\}.$$

Det betyder ocksaa att:

$$\underset{\text{är injektiv}}{T : V \to W} \;\Leftrightarrow\; nullity(T) = 0.$$

(2) Om $W = V$ vi har dessutom att:

$$\underset{\text{är injektiv}}{T : V \to W} \;\Leftrightarrow\; R(T) = V \;\Leftrightarrow\; rk(T) = \dim(V).$$

(3) Om $T : V \to W$ är injectiv då definierar man inversen av T son den linjära avbildningen:

$$T^{-1} : R(T) \to V, T^{-1}(T(v)) = v$$

Om $T_1 : V \to W, T_2 : W \to Z$ är injektiva då är $T_2 \circ T_1$ injektiv och

$$(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}.$$

(4) Låt $\dim(V) = n, \dim(W) = m$. Kom ihåg att eftersom fixade vi en bas i V och en bas i W då har vi två linjära avbidningar:

$$()_B : V \to \mathbb{R}^n, ()_{B'} : W \to \mathbb{R}^m.$$

De är båda injektiva och då är de inverterbara. Följande diagrammet definierar en linjär avbildning mellan $\mathbb{R}^n$

och $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & W \arrow[d, "()_{B'}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "(()_{B'})^{-1}"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Matrisen associerad till denna avbildninger är:

$[T]_{B'B} = \left(\, T(v_1)_{B'} | \ \ ... \ \ | T(v_n)_{B'} \, \right) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

där $B = (v_1, ..., v_n)$. Så har man att:

$$\begin{tikzcd} \vec{v} \arrow[r, "T"] \arrow[d] & T(\vec{v}) \\ (\vec{v})_B \arrow[r, "{[T]_{B'B}}"] & (T(\vec{v})_{B'} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Om $V = W$ då kan man ta $B' = B$ och då gäller att:

$$T(v)_B = \left(\, T(v_1)_B | \ \ ... \ \ | T(v_n)_B \, \right) (v)_B$$

Notera att om $T_1 : V \to W, T_2 : W \to Z$ och B, B', B'' är baser till respektive V, W, Z, då är

$$[T_2 \circ T_1]_{B''B} = [T_2]_{B''B'}[T_1]_{B'B}.$$

(5) Man ser att:

$T : V \to W$ är injektiv $\Leftrightarrow$ $[T]_B$ är inverterbar.

Om detta gäller då är

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}.$$