KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

28 September, 2005

Frågor

(1) Varför säger man att matrisen av en linjär avbildning är beroende på valet av basen?
Låt $T : V \to V$ vara en linjär avbildning och B, B' två baser till V. Hur ändrar man $[T]_B$ till $[T]_{B'}$?

(2) Låt $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Vad betyder att A, B är **similära** matriser?

(3) Vad betyder att en egenskap är **similaritetsinvariant**?

(4) lista några egenskaper som är **similaritetsinvarianta**.

(5) Låt $T : V \to V$ vara en linjär avbildning. Hur beräknar man egenvärden av T? med hjälp av matrisen $[T]_B$?

Svar

(1) Låt $T : V \to V$ vara en linjär avbildning och B, B' två baser till V. Då är matriser $[T]_B$ till $[T]_{B'}$ olika!
Vi skriver (V, B) när vi vill minnas att vi har basen B på V. Låt $B = (u_1, ..., u_n), B' = (v_1, ..., v_n)$. Basbytet kan man tänka som den identitet linjära avbildningen:

$$id : (V, B) \to (V, B')$$

där basbytesmatris är

$$[id]_{B'B} = \big(\ (u_1)_{B'} | \ \ ... \ \ |(u_n)_{B'} \ \big)$$

Vi har det följande kommutativa diagrammet

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "{[T]_{B'}}"] \arrow[d, leftarrow, "{([id]_{BB'})^{-1}}"'] & V \arrow[d, "{[id]_{BB'}}"] \\ V \arrow[r, "{[T]_B}"] & V \end{tikzcd}$$

Då är $T_B = id_{BB'} \circ T_{B'} \circ (id_{BB'})^{-1}$ och $T_{B'} = (id_{BB'})^{-1} \circ T_B \circ id_{BB'}$ och

$$T_B = [id]_{BB'}[T]_{B'}([id]_{BB'})^{-1}, \ T_{B'} = ([id]_{BB'})^{-1}[T]_B[id]_{BB'}$$

(2) Två matriser $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ är similära om det finns en inverterbar matris $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sådan att:

$$B = P^{-1}AP.$$

Matriser av en linjär avbildning, med avseende till två olika baser är similära matriser.

(3) En egenskap är **similaritetsinvariant** om den är oberoende på similaritet. Det betyder att om matrisen A har egenskapen x då har alla matriser som är similära till A också egenskapen x.
Till exempel: det() är **similaritetsinvariant**, d.v.s att om A och B är similära då är $\det(A) = \det(B)$.

(4) (a) det(), determinanten.
(b) att vara inverterbar.
(c) $rk()$, rangen.
(d) $nullity()$.
(e) $P_*(\lambda)$, karakteristiskt polynom.
(f) eigenvärden.
(g) geometriskt multiplicitet.

(5) Vi såg att egenvärden är similaritetsinvarianta, då kan man välja en bas B (**vilken som helst!**) och beräkna egenvärden till matrisen $[T]_B$. Så gäller att:
- λ är ett egenvärde till T om och endast om λ är ett egenvärde till $[T]_B$.
- $\vec{v} \in E_\lambda$ om och endast om $\vec{v}$ är en egenvektor till $[T]_B$ med λ som egenvärde.