KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

Oct 3, 2005

Frågor

(1) Låt $T : V \to V$ vara en linjär avbildning. Hur beräknar man egenvärden av T, med hjälp av matrisen $[T]_B$?

(2) Låt $F : A \to B$ vara en funktion. När är F **surjektiv** (**onto**)?

(3) Låt $F : V \to W$ vara en linjär avbildning. När säger man att F är en **isomorfi**?
Vad betyder att två vektorrum är **isomorfa**?

(4) Är alla vektorrum av samma dimension isomorfa?

Svar

(1) Vi såg att egenvärden är similaritetsinvarianta, då kan man välja en bas B (**vilken som helst!**) och beräkna egenvärden till matrisen $[T]_B$. Så gäller att:
- λ är ett egenvärde till T om och endast om λ är ett egenvärde till $[T]_B$.
- $\vec{v} \in E_\lambda$ om och endast om $\vec{v}$ är en egenvektor till $[T]_B$ med λ som egenvärde.

(2) A finction $F : A \to B$ är **surjektiv** om $R(F) = B$.
Till exempel
- $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F(x, y) = x^2 + y^2$ INTE är surjektiv.
- En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är injektiv om och endast om är surjektiv.

(3) En linjär avbildning F är en **isomorfi** om F är **injektiv** och **surjektiv**.
Två vektorrum är **isomorfa** om det finns en isomorfi mellan dem. Vi betecknar isomorfa vektorum V, W med $V \cong W$.

Till exempel, om $\dim(V) = n$ och B är en bas till V, då äe $()_B : V \to \mathbb{R}^n$ en isomorfi. Så varje vektor rum av dimension n är isomorf till $\mathbb{R}^n$.

(4) Man ser att:

$$V \cong W \quad \Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$$

Så alla vektor rum av samma dimension är isomorfa.