KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

Oct 4, 2005

Frågor

(1) Definiera en **kvadratisk form** $Q(x_1, ..., x_n)$.

(2) Hur skriver man en quadratisk form på **matris form**? Vilken symmetrisk matris A_Q associerar man till $Q(x_1, ..., x_n)$?

(3) Hur undersöker man **maximum** och **minimum** av $Q(x_1, ..., x_n)$?

(4) När säger man att en kvadratisk from är **positivt definit**(> 0), **semipositivt definit**(≥ 0), **negativt definit**(< 0), **seminegativt definit**(≤ 0)?

(5) Hur bestämmer man att $Q(x_1, ..., x_n)$ (eller matrisen A_Q) är **positivt definit**(> 0)?

Svar

(1) En **kvadratisk form** $Q(x_1, ..., x_n)$ är en funktion $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som definieras av:

$$Q(x_1, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + ... + a_{nn}x^n + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{ij}x_ix_j + ... = \sum_{i \geq j = 1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

(2) Låt A_Q vara den **symmetriska** matrisen:

$$A_Q = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & ... & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & ... & \frac{a_{2n}}{2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{a_{n1}}{2} & \frac{a_{n2}}{2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Vi ser att:

$$Q(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & ... & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & ... & \frac{a_{2n}}{2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{a_{n1}}{2} & \frac{a_{n2}}{2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

Så Q skrivas på matris form som:

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A_Q \vec{x}.$$

Obs: matrisen A_Q är entydigt definerad (det finns bara en för varje kvadratisk form Q.)

(3) Kom ihåg att varje symmetrisk matris är diagonaliserbar och har reella egenvärde. Om

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$$

är egenvärden då gäller att:

$$\lambda_1 \parallel \vec{x} \parallel \leq \vec{x}^T A_Q \vec{x} \leq \lambda_n \parallel \vec{x} \parallel$$

Så om man betraktar bara vektorer $\vec{x}$ med $\parallel \vec{x} \parallel = 1$ då kan man säga att:
$\lambda_1 = \lambda_{min}$ är minimum och $\lambda_n = \lambda_{max}$ är maximum.

Dessutom kan man säga att:

$$\vec{x} \text{ egenvektor till } \lambda_1 \;\Leftarrow\; \begin{array}{l} \vec{x}^T A_Q \vec{x} = \lambda_1 \\ \parallel \vec{x} \parallel = 1 \end{array}$$

$$\vec{x} \text{ egenvektor till } \lambda_n \;\Leftarrow\; \begin{array}{l} \vec{x}^T A_Q \vec{x} = \lambda_n \\ \parallel \vec{x} \parallel = 1 \end{array}$$

(4) Vi säger att en kvadratisk from är

(a) **positivt definit**(> 0) om $\vec{x}^T A_Q \vec{x} > 0$ för all $\vec{x} \neq 0$.

(b) **semipositivt definit**(≥ 0) om om $\vec{x}^T A_Q \vec{x} \geq 0$ för all $\vec{x}$.

(c) **negativt definit**(< 0) om om $\vec{x}^T A_Q \vec{x} < 0$ för all $\vec{x} \neq 0$.

(d) **seminegativt definit**(≤ 0) om om $\vec{x}^T A_Q \vec{x} \leq 0$ för all $\vec{x}$.

Samma definitioner gäller för en symmetrisk matris, dvs
$A > 0$ om den associerad kvadratiska formen är > 0
o.s.v.

(5) Man ser att:

$$\begin{array}{lcl} Q > 0 & \Leftrightarrow & \text{alla egenvärden av} A_Q \text{ är } > 0 \\ Q > 0 & \Leftrightarrow & \text{varje principaldelmatris av } A_Q \\ & & \text{har determinenten} > 0 \end{array}$$

En principaldelmatris E_k består av de första k kolumner och första k rader.