KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

Oct 10, 2005

Frågor

(1) Låt $Q(x_1, ..., x_n)$ vara en kvadratisk form. Definiera **diagonaliserinigen** av Q.

(2) Vad är ett kägelsnitt C?

(3) Vad betyder att **kvadratkompletera** C?

(4) Hur hittar man en **standard form** av C?

Svar

(1) Låt $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A_Q \vec{x}$. Eftersom A är en symmetrisk matris är A ortogonalt diagonaliserbar. Det betyder att det finns en ortogonal matris P sådan att

$$Q(\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

där $\lambda_1, ..., \lambda_n$ är egenvärden till A och $\vec{x} = P\vec{y}$.

Matrtisens P har koordinater av motsvarande egenvektorer som kolumner.

(2) Ett kägelsnitt C är ett delrum av $\mathbb{R}^2$ som ges av:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ sådan att } p(x, y) = 0\}$$

där $p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ är ett polynom i variabler x, y av grad 2.

(3) Om $b = 0$ i $p(x, y)$ då kan man traslera axeln till x', y' sådan att C beskrivas som en ellips:

(a) gruppera termer i x och y:

$$C : (ax^2 + dx) + (cy^2 + ey) + f = 0$$

(b) skriv C som:

$$a(x^2 + (d/a)x) + c(y^2 + (e/c)y) + f = 0$$

(c) kompletera kvadrater:

$$a(x + (d/2a))^2 + c(y + (e/2c))^2 - (d/2a)^2 - (e/2c)^2 + f = 0$$

(d) byt till axeln:

$$x' = x + (d/2a), y' = y + (e/2c).$$

(4) En **standard form** av C hittar man genom att combimera (1) och (3).

$$C : Q(x, y) + dx + ey + f = 0$$

(a) diagonalisera Q sådan att:

$$C : \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x + e'y + f' = 0$$

Bas byte ges av

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(b) translera som i (3) sådan att:

$$C : \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = f''$$

Detta beskriver ellipsen:

$$\frac{x''^2}{f''/\lambda_1} + \frac{y''^2}{f''/\lambda_2} = 1$$