KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

01 September, 2005

Frågor

(1) Låt $A; B$ vara två mängder. Vad är en funktion (avbildning) $F : A \to B$?

(2) När är en avbildning $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en linjär avbildning?

(3) Låt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Vilken matris $[F]$ kan man associera till F?

(4) Lista några exempler av linjära avbildningar.

(5) När kan man definiera sammansättningen mellan två avbildningar?

(6) Låt $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara två linjära avbildningar.
  (a) Är $F \circ G = G \circ F$?
  (b) Är $F \circ G$ och $G \circ F$ linjära?
  (c) Jämföra matriser $[F], [G], [F \circ G]$ och $[G \circ F]$.

Svar

(1) En avbildning $F : A \to B$ mellan två mängder A, B är en regel som till *varje* element $a \in A$ ordnar ett *entydig* element $b = F(a) \in B$.
$R(F) = \{b \in$ sådan att $b = F(a)\}$ kallas värdemängden.

(2) Låt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en avbildning definerad av $F(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$. där $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are avbildningar. F är en linjär avbildning om alla $f_i(x_1, ..., x_n)$ är polynom av grad 1.

(3) Låt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då är $F(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$ där är $f_1(x_1, ..., x_n) = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n, ..., f_m(x_1, ..., x_n) = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n$. Coefficienterna a_{ij} definierar en matris

$$[F] = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ & ... & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

Sådan att $[F(v)] = [F][v]$.

(4) Lista några exempler avs linjära avbildningar.

[Sträckning] Given en $k \in \mathbb{R}$ då kan man definiera $F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genom $F(v) = kv$(inreprodukt).

$$[F_k] = \begin{pmatrix} k & 0 & ... & 0 \\ 0 & k & .. & 0 \\ 0 & 0 & ... & k \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

När $k = 1$ då kallas F_1 den identitets avbildning och betcknas av I_m. När $k = 0$ då kallas F_0 den noll avbildning och betcknas av 0.

[Spegling] En spegling i x-axeln definieras som $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ genom $F(x, y) = (-x, y)$.

$$[S] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

På liknande sätt kan man definiera spelningar i en linje i planet.

[ortogonalt komplement] Ortogonal komplementet på x-axeln definieras som $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ genom $K(x, y) = (x, 0)$.

$$[K] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

[Rotation vinkeln θ] Den är en linjär avbildning $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, där $R(x, y) = (xcos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$.

$$[R] = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

(5) Låt $F : A \to B, G : C \to D$. Om $R(F) \subseteq C$ då kan man definiera sammansättningen $G \circ F : A \to D$ genom $G \circ F(a) = G(F(a))$.

(6) Låt $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara två linjära avbildningar.
   (a) I almänhet är $F \circ G \neq G \circ F$?
   (b) $F \circ G$ och $G \circ F$ är linjära eftersom de defineras genom en matris $[F \circ G]$.
   (c) Det gäller att $[F \circ G] = [F][G]$, och $[G \circ F] = [G][F]$.