KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

05 September, 2005

Frågor

(1) Låt $F : A \to B$ vara en avbildning. När är F injektiv? När är F inverterbar?

(2) När är en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injektiv? När är F inverterbar?

(3) Låt $e_1 = (1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$ vara den standard basen till $\mathbb{R}^n$. Låt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Hur kan man definiera $T(x_1, x_2, ..., x_n)$ från $T(e_1), ..., T(e_n)$?

(4) Låt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en avbildning. Ge alla ekvivalenta definitioner för F att vara linjär.

(5) Vad betecknar vi med P_k?

Svar

(1) F kallas en injektiv avbildning om F ordnar två olika element $F(a) \neq F(b)$ i B till två olika element $a \neq b$ i A.

Så är F *injektiv* om den fljande gäller:

$$F(a) = F(b) \Rightarrow a = b$$

F kalls *inverterbar* om det finns en invers avbildning, i.e. en avbildning $F^{-1} : B \to A$ sådan att $F \circ F^{-1} = id_B$ och $F^{-1} \circ F = id_A$.

(2) Om $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning (Obs samma dimension) då gäller att:

$$F \text{ är injektiv} \Leftrightarrow F \text{ är inverterbar } \Leftrightarrow R(F) = \mathbb{R}^n$$

Dessutom om F är en inverterbar linjär avbildning då är $F^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ också linjär och

$$[F^{-1}] = [F]^{-1}.$$

(3) Kolumnerna an matrisen $[F]$ motsvara vektorer $F(e_i)$.

$$[F] = [F(e_1)|F(e_2)|...|F(e_n)]$$

Så definitionen av F är:

$$[F(e_1)|F(e_2)|...|F(e_n)] \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

(4) De följande påstånden är ekvivalenta:

(a) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär.

(b) Det finns en matris $[F] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ sådan att

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ . \\ . \\ . \\ w_m \end{pmatrix} = [F] \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

där $F(x_1, ..., x_n) = (w_1, ..., w_m)$.

(c) För varje $v_1, v_2 \mathbb{R}^n$ är $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ och för varje $k \in \mathbb{R}$ är $F(kv) = kF(v)$.

(5) P_k betecknar alla polynom med koefficienterna i $\mathbb{R}$ i en variabel x och av grad k:

$$P_k = \{p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k \text{ sådan att } a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Varje element $p(x) \in P_k$ definierar en vektor $[p] = (a_0 + ... + a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$.

Vi har två operationer på P_k:

- $p_1(x) + p_2(x) = (a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k) + (b_0 + b_1 x + ... + b_k x^k) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + ... + (a_k + b_k)x^k$
- $hp(x) = h(a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k) = ha_0 + ha_1 x + ... + ha_k x^k$.

Det gäller att $[p_1(x) + p_2(x)] = [p_1(x)] + [p_2(x)]$ och $[hp(x)] = h[p(x)]$.