

FRÅGOR

- (1) Låt V vara ett vektorrum och $v_1, \dots, v_r \in V$. Vad är $\text{Span}(v_1, \dots, v_r)$?
- (2) Låt V vara ett vektorrum och $v_1, \dots, v_k \in V$. När säger vi att (v_1, \dots, v_r) är linjärt oberoende?

SVAR

- (1) $\text{Span}(v_1, \dots, v_r)$ består av alla linjära kombinationer av v_1, \dots, v_r :

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_r) = \{v = k_1v_1 + \dots + k_nv_n \text{ där } k_i \in \mathbb{R}\}.$$

Detta är ett DELRUM eftersom:

- om $w_1 = k_1v_1 + \dots + k_nv_n, w_2 = h_1v_1 + \dots + h_nv_n \in \text{Span}(v_1, \dots, v_r)$ då är $w_1 + w_2 = (k_1 + h_1)v_1 + \dots + (k_r + h_r)v_r \in \text{Span}(v_1, \dots, v_r)$.
- om $k \in \mathbb{R}, v = h_1v_1 + \dots + h_nv_n \in \text{Span}(v_1, \dots, v_r)$ då är $kv = kh_1v_1 + \dots + kh_nv_n \in \text{Span}(v_1, \dots, v_r)$.

Man ser att $\text{Span}(v_1, \dots, v_r)$ är det minsta delrummet som innehåller v_1, \dots, v_r , d.v.s. att alla delrum W som innehåller v_1, \dots, v_r är delrum till $\text{Span}(v_1, \dots, v_r)$.

Exempel:

- Låt $v \in \mathbb{R}^2$ då är $\text{Span}(v)$ lika med linjen genom v och origon.
- Låt $v, w \in \mathbb{R}^3$ då är $\text{Span}(v, w)$ lika med planet genom v, w och origon.
- $\text{Span}(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{R}^n$.
- $\text{Span}(1, x, x^2, \dots, x^k) = P_k$.

- (2) Vi säger att v_1, \dots, v_r är *linjärt oberoende* om bara noll koefficienter ger den noll vektorn, d.v.s om den följande gäller:

$$k_1v_1 + \dots + k_nv_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0.$$

Om v_1, \dots, v_r INTE är linjärt oberoende då säger vi att de är *linjärt beroende*.

Man ser att:

$$\begin{array}{l} v_1, \dots, v_r \\ \text{är linjärt beroende} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{det finns en } v_i \text{ som kan skrivas} \\ \text{som en linjär kombination av dem andra} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} v_1, \dots, v_r \\ \text{är linjärt oberoende} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{ingen } v_i \text{ som kan skrivas} \\ \text{som en linjär kombination av dem andra} \end{array}$$