KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

08 September, 2005

Frågor

(1) Hur många vektorer i $\mathbb{R}^n$ kan vara linjärt oberoende?

(2) Låt $f_1, ..., f_n \in C^{n-1}(-\infty, \infty)$. När är $(f_1, ..., f_n)$ linjärt oberoande?

(3) Låt V vara ett vektorrum och $v_1, ..., v_r \in V$. När säger vi att $(v_1, ..., v_n)$ är en bas?

(4) Låt V vara ett vektorrum och $(v_1, ..., v_n)$ vara en bas till V. Definiera koordinaterna av en vektor $v \in V$, med avseende till basen $(v_1, ..., v_n)$.

(5) När säger vi att ett vektorrum V är ändligt-dimensionellt? När är V oändligt-dimensionellt?

(6) Är det möjligt att ett vektorrum har många olika baser? Har två baser samma antalet vektorer?

(7) Låt V vara ett ändligt-dimensionellt vektor rum. Definiera $\dim(V)$.

(8) Låt $W \subseteq V$ vara att delrum. Jämföra $\dim(V)$ och $\dim(W)$.

Svar

(1) $v_1, ..., v_r \in \mathbb{R}^n$ är alltid linjärt beroende om $r > n$.

(2) Låt $f_1, ..., f_n \in C^{n-1}(-\infty, \infty)$. Den *Wronskian* funktionen av $f_1, ..., f_n$ definieras som:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)(x)} \end{pmatrix}$$

Man ser att:

Om $f_1, ..., f_n \in C^{n-1}(-\infty, \infty)$ sådan att $W(x) \neq 0$ för någon x	$\Rightarrow$	då är $f_1, ..., f_n$ **linjärt oberoende**

(3) $(v_1, ..., v_r)$ är en bas till V om de är **linjärt oberoende** och $Span(v_1, ..., v_n) = B$.

- $(e_1, ..., e_n)$ kallas den standard basen till $\mathbb{R}^n$.
- $(1, x, x^2, ..., x^k)$ kallas den standard basen till P_k.
- Låt $A_{lk} = (a_{ij})$ där

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad (i,j) = (lk) \\ 0 & \text{om} \quad (i,j) \neq (lk) \end{cases}$$

$\{A_{lm}, 1 \leq l \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ kallas den standard basen till $M_{n,m}\mathbb{R}$.

(4) Att $(v_1, ..., v_r)$ är en bas till V betyder att alla vektorer $v \in V$ kan skrivas son en linjär kombination $v = k_1v_1 + ... + k_rv_r$ p ett unikt sätt. Så är $(k_1, ..., k_r)$ en unik vektor som man associerar till v. Den kallas koordinatsvektor och $k_1, ..., k_r$ are koordinaterna av v med avseende till basen $(v_1, ..., v_k)$.

(5) Vi säger att V är ändligt-dimensionellt if V har en bas $(v_1, ..., v_r)$. Annars säger vi att V är oändligt-dimensionellt.

(6) Ett ändligt-dimensionellt vektor rum får ha olika baser, men alla ska ha samma antalet vektorer. Så Om $(v_1, ..., v_r)$, $(w_1, ..., w_s)$ är två olika baser tll V, då är $r = s$.

(7) Dimensionen av ett ändligt-dimensionellt vektor rum är lika med antalet vektorer i en bas.
- $\dim(\{0\} = 0$ by convention!
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- $\dim(P_k) = k + 1$.
- $\dim(M_{n,m}(\mathbb{R})) = nm$.

Det är viktigt att veta att om $\dim(V) = n$ då har vi att:

$v_1, ..., v_r$ är **linjärt beroende** $\Leftrightarrow$ $v_1, ..., v_r$ är en bas

Om $Span(v_1, ..., v_n) = V \quad \Leftrightarrow \quad v_1, ..., v_r$ är en bas

(8) $\dim(W) \leq \dim(V)$. Dessutom kan man brja från en bas till W och bygga en bas till V: antar att $\dim(W) = s$, och $\dim(W) = n$
- Låt $w_1, ..., w_s$ vara en bas till W.
- Låt $v_1 \notin W$.
- Låt $v_2 \notin Span(w_1, ..., w_s, v_1)$
- Fortsätt till $v_{n-s} \notin Span(w_1, ..., w_s, v_1, ..., v_{n-s-1})$
- $(w_1, ..., w_s, v_1, ..., v_{n-s-1}, v_{n-s})$ är en bas till V.