KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

12 September, 2005

Frågor

(1) Låt $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Definiera $\mathbf{Row(A)}, \mathbf{Col(A)}, \mathbf{N(A)}$.

(2) Låt $\vec{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. När har systemet

$$A\vec{v} = \vec{b}$$

en lösning?

(3) "Gauss elimination" hittar lösningarna av ett systen genom att ändra matrisen A till en elementär matris A'. Vad van vi säga om $\mathbf{Row(A')}, \mathbf{Col(A')}, \mathbf{N(A')}$?

(4) Definiera $\mathbf{rk(A)}$, ranken af matrisen A.

(5) Hur kan man beräkna $rk(A)$ från $N(A)$?

(6) Betrakta linjär avbildningen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ motsvarande en matris $A =\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ med samma beteckning. Jämföra :

egenskaperna av systemet $\Leftrightarrow$ egenskaperna av avbildningen

$A\vec{v} = \vec{b}$ $\qquad$ $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Svar

(1) Låt

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m,1} & ... & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Vi ska beteckna rad-vektorerna med

$\vec{r_1} = (a_{1,1}, ..., a_{1,n}), ..., \vec{r_m} = (a_{m,1}, ..., a_{m,n}) \in \mathbb{R}^m$

och kolumn-vektorerna med

$\vec{c_1} = (a_{1,1}, ..., a_{m,1}), ..., \vec{c_n} = (a_{1,n}, ..., a_{m,n}) \in \mathbb{R}^n$

- $\mathbf{Row(A)} = span(\vec{r_1}, ..., \vec{r_m}) \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\mathbf{Col(A)} = span(\vec{c_1}, ..., \vec{c_n}) \subseteq \mathbb{R}^m$
- $\mathbf{N(A)} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n, A\vec{v} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$

Låt nu $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara den motsvarande linjära funktionen. Då är

$$N(A) = Ker(A)$$

Vi kommer att använda beteckningen $N(A)$.

Observera att alla tre är *delrum*.

$$\dim(N(A)) = nullity(A).$$

(2) En lösning till systemet är en vektor $\vec{(v)} = (x_1, ..., x_n)$ som ska ge:

$$x_1\vec{c_1} + ... + x_n\vec{c_n} = \vec{b}$$

Då kan man säga att:

$A\vec{v} = \vec{b}$ har en lösning $\quad \Leftrightarrow \quad b \in Span(\vec{c_1}, ..., \vec{c_n})$

(3) Antar att vi får A' från A, genom elementär radoperationer. Låt $\vec{c'_1}, ..., \vec{c'_n}$ vara kolumnen i A', och $\vec{r'_1}, ..., \vec{r'_m}$ vara rader i A'. Då gället att:
- $N(A) = N(A')$.
- $Row(A) = Row(A')$.
- Om $(\vec{c_1}, ..., \vec{c_s})$ är linjärt oberoende då är $(\vec{c'_1}, ..., \vec{c'_s})$ linjärt oberoende.
- Om $(\vec{c_1}, ..., \vec{c_s})$ är en bas till $Col(A)$ då är $(\vec{c'_1}, ..., \vec{c'_s})$ en bas till $Col(A')$.
- Om A' är en trappmatris, då vektorerna $\vec{c'_i}$ som innehåller en"leading 1" utgörar en bas till $Col(A')$, och $\vec{r'_i}$ som innehåller en"leading 1" utgörar en bas till $Row(A')$.

(4) Det följer att för alla matriser A är

$$\dim(Col(A)) = \dim(Row(A)).$$

Så kan man definiera ranken som:

$$rk(A) = \dim(Col(A)) = \dim(Row(A)).$$

Notera att $rk(A) = rk(A^T)$, och $rk(A) = rk(A')$.

(5) Låt $A \in M_{m,n}$. Det följande gäller:

$$n = rk(A) + nullity(A)$$

(6) Låt $Sol_b(A) = \{\vec{v},\ \text{lösning till } A\vec{v} = \vec{b}\}$, och

$$R(A) = \{\vec{(b)} \in \mathbb{R}^m \text{ sådan att det finns } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ med } A(\vec{x}) = \vec{b}\} \in \mathbb{R}^m.$$

- $$N(A) = Sol_0(F) = \{\vec{0}\} \quad \Leftrightarrow \quad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ är injektiv}$$
- $R(A) = Col(A)$

- $$Sol_b(A) \neq \emptyset \text{ för alla } \vec{b} \in \mathbb{R}^m \quad \Leftrightarrow \quad R(A) = \mathbb{R}^m$$
- $$n = rk(A) + nullity(A) \quad \Leftrightarrow \quad n = \dim(R(A)) + \dim(N(A))$$

  Obs: $N(A) = Ker(A)$.