KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

13 September, 2005

Frågor

(1) Låt V vara ett vektorrum. Vad är en **inre produkt** på V.

(2) Låt $(V, <, >)$ vara ett vektorrum med en inre produkt, och låt $\vec{v}, \vec{w} \in V$. Vad är $\| \vec{v} \|$, **normen** av $\vec{v}$ och $d(\vec{v}, \vec{w})$, **distansen** mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$?

(3) Förklara den **Cauchy-Schwarz inequality** för $(V, <, >)$.

(4) När är två vektorer $\vec{v}, \vec{w} \in (V, <, >)$ **ortogonala**?

(5) Låt $W \subseteq (V, <, >)$. Definiera $W^\perp$, det **ortogonala komplementet** till W.

Svar

(1) En inre produkt på V är en *linjär avbildning*

$$\begin{array}{rcl} <,>: V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) \in V \times V & \mapsto & <\vec{u}, \vec{v}> \in \mathbb{R} \end{array}$$

med dem följande egenskaperna:

(a) $<\vec{u}, \vec{v}> = <\vec{v}, \vec{u}>$ för alla $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

(b) $<\vec{u}, \vec{u}> \geq 0$ för alla $\vec{u} \in V$, och $<\vec{u}, \vec{u}> = 0$ om och endast om $\vec{u} = \vec{0}$.

Kom ihåg att linjär betyder att

$$<\vec{u_1}+\vec{u_2}, \vec{v}> = <\vec{u_1}, \vec{v}> + <\vec{u_2}, \vec{v}> \quad \text{och} \quad <k\vec{u}, \vec{v}> = k <\vec{u}, \vec{v}> .$$

Observera också att (a) innebära att

- $<\vec{v}, \vec{u_1} + \vec{u_2}> = <\vec{v}, \vec{u_1}> + <\vec{v}, \vec{u_2}>$
- $<\vec{u}, k\vec{v}> = k <\vec{u}, \vec{v}>$

Dessutom gäller att:

- $<\vec{0}, v> = <v, \vec{0}> = 0$ för alla $v \in V$.
- $<\vec{v}, \vec{u_1} - \vec{u_2}> = <\vec{v}, \vec{u_1}> - <\vec{v}, \vec{u_2}>$

Viktiga exempel är

- Den euklidiska inre produkten på $\mathbb{R}^n$:
$$<\vec{u}, \vec{v}> = \vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 b_1 + ... + a_n b_n,$$
där $\vec{u} = (a_1, ..., a_n), \vec{v} = (b_1, ..., b_n)$.
- Låt $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Man kan definiera inre produkten av A, på $\mathbb{R}^n$:
$$<\vec{v}, \vec{u}>_A = A\vec{x} \cdot A\vec{u}$$
När
$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{w_n} \end{pmatrix}$$
då kallas $<\vec{v}, \vec{u}>_A$ inre produkten av vikt $w = (w_1, ..., w_n)$.
Man ser att $<\vec{v}, \vec{u}>_A = w_1 a_1 b_1 + ... + w_n a_n b_n$.
När $A = I_n$ är den diagonala matrisen, d.v.s.

$w = (1, ..., 1)$, då är $< \vec{v}, \vec{u} >_A$ samma son den euklidiska inre produkten.

- på P_k kan man definiera dem fljande inre produkterna:
  Låt $\vec{p} = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k$, $\vec{q} = b_0 + b_1 x + ... + b_k x^k$.
  - $< \vec{p}, \vec{q} >= a_0 b_0 + ... + a_k b_k$.
  - $< \vec{p}, \vec{q} >= \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx$.
- På $C(a, b)$ kan man definiera

$$< f(x), g(x) >= \int_a^b p(x) q(x) dx.$$

(2)

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{< \vec{v}, \vec{v} >}$$

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \| (\vec{v} - \vec{w} \|$$

Från definitionen följer att:

- $\| \vec{v} \| \geq 0$ och $\| \vec{v} \| = 0$ om och endast om $\vec{v} = \vec{0}$.
- $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$.
- $d(\vec{v}, \vec{w}) \geq 0$ och $d(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ om och endast om $\vec{v} = \vec{w}$.

(3) den **Cauchy-Schwarz inequality** för $(V, <, >)$ säger att

$$| < \vec{u}, \vec{v} > | \leq \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| .$$

Det följer att man kan definiera en vinkel θ mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ genom att sätta:

$$cos(\theta) = \frac{< \vec{u}, \vec{v} >}{\| \vec{u} \| \| \vec{v} \|}.$$

(4) $\vec{v}, \vec{w} \in (V, <, >)$ är **ortogonala** om och endast om $< \vec{u}, \vec{v} >= 0$.

Låt $W \subseteq V$ vara en delmängd.

$$W^{\perp} = \{\vec{v} \in V \text{ med } < \vec{v}, \vec{w} >= 0 \text{ för alla } \vec{w} \in W\}.$$

Så är $W^{\perp}$ mängden av vektorer som är ortogonala till alla vektorer i W.

Om W är ett delrum då gäller att:

- $W^{\perp}$ är ett delrum.
- $W \cap W^{\perp} = \{\vec{0}\}$.
- $(W^{\perp})^{\perp} = W$

Notera att $\{\vec{0}\}^{\perp} = V$, och $V^{\perp} = \{\vec{0}\}$.