KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.
14 September, 2005

Frågor

(1) Låt $(V, <,>)$ vara ett vektorrum med en inre-produkt och $S = \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_r}\} \subset V$.
- När är S **ortogonal**?
- När är S **ortonormal**?
- Vad är en ortonormal bas (**ON-bas**)?

(2) Låt $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$ vara en ON-bas till $(V, <,>)$, och $\vec{v}, \vec{u} \in V$. Hur hittar man $\parallel \vec{u} \parallel, d(\vec{u}, \vec{v}), < \vec{u}, \vec{v} >$?

(3) Låt $B = (\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$ vara en **ON-bas**, hur hittar man koordinaterna av en vektor $\vec{v} \in V$ med anseende till basen B? Om $B = (\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$ är en **ortogonal bas**, vilka koordinater har $\vec{v}$?

(4) Vad är den **Gram-Schmidt Process** för att hitta en ON-bas till varje ändligt dimensionellt vector rum V, med en inre produkt $<,>$?

(5) Låt W vara ett delrum av V, och $v \in V$. Vad är vektorn $\mathbf{proj_W(v)}$?

Svar

(1) Låt V vara ett vektorrum och $S = \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_r}\} \subset V$.
- Vi säger att S är en **ortogonal** mängd om $< \vec{v_i}, \vec{v_j} >= 0$ för alla $i \neq j$. Det vill säga att varje par vektorer i S är ortogonala.
- Vi säger att S är en **ortonormal** mängd om S är ortogonal och varje vektor $\vec{v_i} \in V$ har norm lika med ett, $\parallel \vec{v_i} \parallel = 1$.
- En ortonormal bas (**ON-bas**) är en bas till V, som är en ortonormal mängd, d.v.s att $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$ är en **ON-bas** om
  - $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$ är linjärt oberoende och
  - $Span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_r}) = V$ och
  - $< \vec{v_i}, \vec{v_j} >= 0$ för alla $i \neq j$ och
  - $\parallel \vec{v_i} \parallel = 1$.

(2) Låt $\vec{u} = (u_1, ..., u_r), \vec{v} = (v_1, ..., v_r)$ vara koordinaterna med avseende till basen $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$. Då är:
- $\parallel \vec{u} \parallel = \sqrt{u_1^2 + ... + u_r^2}$;
- $d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + ... + (u_r - v_r)^2}$;
- $< \vec{u}, \vec{v} >= u_1 v_1 + ... + u_r v_r$.

(3) Låt $\vec{v} \in V$.
- Om $B = (\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$ är en **ON-bas** då är:
$$\vec{v} = (< \vec{v}, \vec{v_1} >, ..., < \vec{v}, \vec{v_r} >)$$
- Om $B = (\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$ är en **ortogonal bas** då är:
$$\vec{v} = (\frac{< \vec{v}, \vec{v_1} >}{\parallel v_1 \parallel^2}, ..., \frac{< \vec{v}, \vec{v_r} >}{\parallel v_r \parallel^2})$$

(4) Låt V vara ett ändligt dimensionellt vektor rum med en inre produkt $<,>$. Börja med en bas $(\vec{u_1}, ..., \vec{u_r})$, Så där bygger man en ortogonal bas $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_r})$:

- $\vec{v_1} = \vec{u_1}$
- $\vec{v_2} = \vec{u_2} - \frac{<\vec{u_2},\vec{v_1}>}{\|\vec{v_1}\|^2}\vec{v_1}$
- $\vec{v_3} = \vec{u_3} - \frac{<\vec{u_3},\vec{v_1}>}{\|\vec{v_1}\|^2}\vec{v_1} - \frac{<\vec{u_3},\vec{v_2}>}{\|\vec{v_2}\|^2}\vec{v_2}$

....

- $\vec{v_r} = \vec{u_r} - \frac{<\vec{u_r},\vec{v_1}>}{\|\vec{v_1}\|^2 l}\vec{v_1} - \frac{<\vec{u_r},\vec{v_2}>}{\|\vec{v_2}\|^2}\vec{v_2} - ... - \frac{<\vec{u_r},\vec{v_{r-1}}>}{\|\vec{v_{r-1}}\|^2}\vec{v_{r-1}}$.

Sedan får man en ON-bas genom att dela men normer:

$$\text{ON-bas: } (\frac{\vec{v_1}}{\| \vec{v_1} \|}, ..., \frac{\vec{v_r}}{\| \vec{v_1} \|}).$$

(5) W är änligt dimensionellt så kan man hitta en ON-bas $(\vec{w_1}, ..., \vec{w_r})$. Då är:

$$proj_W(\vec{v}) =< \vec{v}, \vec{w_1} > \vec{w_1} + ...+ < \vec{v}, \vec{w_r} > \vec{w_r} \in W$$

Notera att varje $v \in V$ kan skrivas på ett entydig dtt som

$$v = proj_W(\vec{v}) + \vec{v}^{\perp}$$

där $proj_W(\vec{v}) \in W$ och $\vec{v}^{\perp} \in W^{\perp}$.