KTH Matematik

ProvTentamen
5B1307 Linjär algebra g.k.
2005

- Skrivtid: 8:00-13:00.
- MOTIVERING krävs!
- Minst 16 päng krävs för betyg 3, minst 21 för betyg 4, minst 28 för betyg 5.

- Obs: meningen är inte att tentan innehåller uppgifterna av samma typ! Detta exemplaret visar vilket format kommer på tentamen. Uppgifterna ger en bra träning för tentamen.

DEL A (20 poäng INKLUSIVE bonus poäng)

(1) (3 p.)[inklusive bonus poäng från KS1]
Betrakta funktionen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som defineras av:
$F(x, y, z) = (-x + 3y, 2x + y + 2z, 4x + 5y - 3z)$.
Är F inverterbar?
Lösnings föreslag: Funktionen är linjär man ser att:
- $F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = F(x_1, y_1, z_1) + F(x_2, y_2, z_2)$
- $kF(x_1, y_1, z_1) = F(kx_1, ky_1, kz_1)$.

Låt S vara den standard basen, då är matrisen:

$$[F]_S = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$\det[F]_S \neq 0$ då är F inverterbar.

(2) (3 p.)[inklusive bonus poäng från KS2]
Låt P_3 vara vektor rummet av polynom av grad mindre eller lika med 3. Betrakta delrummet:

$$W = \{p(x) \in P_3 \text{ sådan att } p''(x) = 0\}.$$

(a) Hitta en bas till W.
(b) Bestäm $\dim(W)$.

Lösnings föreslag: Låt $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3$. Man ser att $p^{"}(x) = 6ax + 2b = 0$ ger att $a = b = 0$. Då är $W = \{cx + d \in \mathbb{R}\} = Span(1, x)$.
Eftersom är $(1, x)$ en del av standard basen dåär de L.I. och blir $(1, x)$ en bas till W. Det visar att $\dim(W) = 2$.

(3) (3 p.)[inklusive bonus poäng från KS3]
Betrakta vektor rummet P_3 med inreprodukten:

$$< p(x), q(x) >= \int_1^1 p(x)q(x).$$

Låt W vara delrummet i uppgiften (2).
Hitta en ON-bas av W.
Lösnings föreslag: Man börjar med basen $(u_1, u_2) = (1, x)$ och sedan observerar man att $< 1, x >= 0$ coh så är de ortogonala. Eftersom är $\| 1 \|= 2$, $\| x \|= 2/3$ då är $(1/\sqrt{2}, (\sqrt{3/2})x)$ en ON-bas.
Annars kan man använda Gram-Schmidt.

(4) (3 p.)[inklusive bonus poäng från KS4]
Betrakta funktionen:

$$T : P_3 \to \mathbb{R}, T(p(x)) = p'(0).$$

(a) Visa att T är en linjär avbildning.
(b) Bestäm $Ker(T), R(T)$.

Lösnings föreslag: T är linjär eftersom:
- $T(p(x) + q(x)) = (p(x) + q(x))'|_{x=0} = p'(0) + q'(0) = T(p(x)) + T(q(x))$.
- $T(kp(x)) = kp'(0) = kT(p(x))$.

$$Ker(T) = \{p(x) \in P_3 \text{ med } p'(0) = 0\}$$

Om $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3$ då är $p'(0) = c = 0$. Då är $Ker(T) = Span(1, x^2, x^3)$.

$$R(T) = \{c \in \mathbb{R} \text{ med } c = p'(0), \text{ för något } p(x)\}$$

Man kan ta $p(x) = cx$. Då för alla $c \in \mathbb{R}$ har man att $c \in R(T)$. Det betyder att $R(T) = \mathbb{R}$.

(5) (4 p.) Låt B vara den stardard basen till $M_{2,2}(\mathbb{R})$, och B' vara den standard basen till $\mathbb{R}^2$. Betrakta den linjära avbildning $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, med matris:

$$[T]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna

$$T \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestäm $rk(T)$.

Lösnings föreslag:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, 5, 0, 1)_B.$$

Då gäller att:

$$T \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$rk(T) = rk([T]_{BB'}) \leq 2.$$

Vi ser att första två kolumnerna är L.I. så är $rk([T]_{BB'}) = \dim(Col([T]_{BB'}) = 2$.

(6) (4 p.) Skriv kägelsnitt $3x^2 - 8xy - 12y^2 - 30x - 64y = 0$ på standard form. Beskriv basbyten som ger standard formen. **Lösnings föreslag:**

$$C : Q(x, y) - 30x - 64y = 0.$$

där $Q(x, y) = 3x^2 - 8xy - 12y^2$. Diagonaliseringen av Q ger: $\lambda_1 = -13, \lambda_2 = 4$. En ON-basis av motsvarande egenvektorer är $((1/\sqrt{17}, 4/\sqrt{17}), (-4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17}))$. Det betyder att efter basbyten:

$$\begin{aligned} x &= 1/\sqrt{17}x' - 4/\sqrt{17}y' \\ y &= 4/\sqrt{17}x' + 1/\sqrt{17}y' \end{aligned}$$

har vi:

$$C : -13x'^2 + 4y'^2 - (286/\sqrt{17})x' + (56/\sqrt{17})y' = 0.$$

Kvadrat-komplettering ger:

$$C : -13(x' - 11/\sqrt{17})^2 + 4(y' + 7/\sqrt{17})^2 + 81 = 0.$$

Så efter basbyetn

$$\begin{aligned} x'' &= x' - 11/\sqrt{17} \\ y'' &= y' + 7/\sqrt{17} \end{aligned}$$

Får vi C i standard form.:

$$C : -13(x'')^2 + 4(y'')^2 + 81 = 0.$$

som beskriver en ellips.

Basbyte ges av:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1/\sqrt{17}x'' - 4/\sqrt{17}y'' - 1 \\ y'' & = & 4/\sqrt{17}x'' - 1/\sqrt{17}y'' - 37/17 \end{array}$$

DEL B (15 poäng)

(1) (5 p.) Betrakta matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) för vilken a och vilken b är A diagonaliserbar?
Lösnings föreslag: matrisen är symmetrisk så är ortogonalt diagonalizering för all $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) för vilken a och vilken b är A ortogonalt diagonaliserbar? **Lösnings föreslag:** Se (a).

(2) (5 p.) Låt V vara ett vektor rum med inreproducten $<,>$. Visa att:

$\| \vec{u} \| = \| \vec{v} \|$ om och endast om $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$ är ortogonala.

Lösnings föreslag:

$$(*) < \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} > = < \vec{u}, \vec{u} > - < \vec{v}, \vec{v} >$$

Antar att $\| \vec{u} \| = \| \vec{v} \|$. Från (*) ser vi att:

$$(**) < \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} > = \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2 = (\| \vec{u} \| - \| \vec{v} \|)(\| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|) = 0.$$

Då är $\vec{u} + \vec{v}$ och $\vec{u} - \vec{v}$ ortogonala.

Antar att $\vec{u} + \vec{v}$ och $\vec{u} - \vec{v}$ är ortogonala. (**) ger att

$$\| \vec{u} \| - \| \vec{v} \| = \frac{< \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} >}{\| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|} = 0$$

som ger att $\| \vec{u} \| = \| \vec{v} \|$.

(3) (5 p.) Är $M_{2,2}$ isomorf till P_3? Om Ja skriv en isomorfi mellan dem.

Lösnings föreslag: De är två vektor rum av samma dimension då är de isomorfa.

Låt $B = (A_1, ..., A_4)$ vara standard basen till $M_{2,2}$, och $B' = (1, x, x^2, x^3)$ vara standard basen till P_3.

Isomorfin $T : M_{2,2} \to P_3$ ges av

$$T(aA_1 + ... + dA_4) = a \cdot 1 + ... + dx^3.$$

det betyder att:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + bx + cx^2 + dx^3$$