KTH Matematik

5B1307 Linjär algebra g.k.

07 September, 2005

Frågor

(1) Låt V vara ett vektorrum och $v_1, ..., v_r \in V$. Vad är $Span(v_1, ..., v_r)$?

(2) Låt V vara ett vektorrum och $v_1, ..., v_k \in V$. När säger vi att $(v_1, ..., v_r)$ är linjärt oberoende?

Svar

(1) $Span(v_1, ..., v_r)$ består av alla linjära kombinationer av $v_1, ..., v_r$:

$$Span(v_1, ..., v_r) = \{v = k_1v_1 + ... + k_rv_r \text{ där } k_i \in \mathbb{R}\}.$$

Detta är ett DELRUM eftersom:

- om $w_1 = k_1v_1 + ... + k_rv_r, w_2 = h_1v_1 + ... + h_rv_r \in Span(v_1, ..., v_r)$ då är $w_1 + w_2 = (k_1 + h_1)v_1 + ... + (k_r + h_r)v_r \in Span(v_1, ..., v_r)$.
- om $k \in \mathbb{R}, v = h_1v_1 + ... + h_rv_r \in Span(v_1, ..., v_r)$ då är $kv = kh_1v_1 + ... + kh_rv_r \in Span(v_1, ..., v_r)$

Man ser att $Span(v_1, ..., v_r)$ är det minsta delrummet som innehåller $v_1, ..., v_r$, d.v.s. att alla delrum W som innehåller $v_1, ..., v_r$ är delrum till $Span(v_1, ..., v_r)$.

Exempel:

- Låt $v \in \mathbb{R}^2$ då är $Span(v)$ lika med linjen genom v och origon.
- Låt $v, w \in \mathbb{R}^3$ då är $Span(v, w)$ lika med planet genom v, w och origon.
- $Span(e_1, ..., e_n) = \mathbb{R}^n$.
- $Span(1, x, x^2, ..., x^k) = P_k$.

(2) Vi säger att $v_1, ..., v_r$ är *linjärt oberoende* om bara noll koefficienter ger den noll vektorn, d.v.s om den följande gäller:

$$k_1v_1 + ... + k_rv_r = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = ... = k_r = 0.$$

Om $v_1, ..., v_r$ INTE är linjärt oberoende då säger vi att de är *linjärt beroende*.

Man ser att:

$v_1, ..., v_r$ är **linjärt beroende**	$\Leftrightarrow$	det finns en v_i som kan skrivas som en linjär kombination av dem andra
$v_1, ..., v_r$ är **linjärt oberoende**	$\Leftrightarrow$	ingen v_i som kan skrivas som en linjär kombination av dem andra